# 理科数学参考解答及评分参考

**评分说明:**

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考,如果考生的解答与本解答不同,可根据试题的主要考查内容比照评分参考制定相应的评分细则.

2. 对计算题,当考生的解答在某一步出现错误时,如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度,可视影响的程度决定后继部分的给分,但不得超过该部分正确解答应得分数的一半;如果后继部分的解答有较严重的错误,就不再得分.

3. 解答右端所注分数,表示该生正确做到这一步应该得的累加分数.

4. 只给整数分数. 选择题不给中间分.

**一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.**

1.【答案】B.

【命题意图】考查集合的表示法,集合的基本运算. 考查数形结合思想. 考查数学运算数学核心素养.

【解析】集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=[0,3)$,所以 $A\cap B=[0,2]$.

注:本题考查目的是集合的表示与基本运算,所以没有在区间端点处设置障碍.

2.【答案】D.

【命题意图】考查复数的基本概念,复数代数运算. 考查数学运算数学核心素养.

【解析】复数 $z_1=\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$,$z_2=\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$,$\therefore 2z_1+z_2=1-\mathrm{i}$,复平面内表示这个复数的点在第四象限.

3.【答案】C.

【命题意图】考查充要条件,抛物线与双曲线的基本性质. 考查直观想象,逻辑推理数学核心素养.

【解析】若 $F$ 是抛物线 $y^2=12x$ 的焦点,则 $F$ 的坐标为 $(3,0)$,而 $(3,0)$ 也是双曲线 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 的右焦点,所以前者是后者的充分条件. 若 $F$ 是双曲线 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 的焦点,则 $F$ 的坐标可能是 $(-3,0)$,而 $(-3,0)$ 不是抛物线 $y^2=12x$ 的焦点,即前者不是后者的必要条件. $\therefore$C 正确.

4.【答案】D.

【命题意图】考查三次函数,利用导数求曲线的切线,直线方程.考查数学运算数学核心素养.

【解析】$\because f(x)=\frac{1}{9}(x+1)(2x^2-8x-1)$,$\therefore f(-1)=0$,即$A(-1,0)$.又$f'(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x-1$,$\therefore f'(-1)=1$,$\therefore$曲线$y=f(x)$以$A(-1,0)$为切点的切线方程为$y=f'(-1)(x+1)$,即$y=x+1$.

5.【答案】A.

【命题意图】考查二项式定理.考查数学运算数学核心素养.

【解析】$(m-x)^5$展开式的通项公式为$T_{k+1}=C_5^k m^{5-k}(-x)^k=(-1)^k m^{5-k}C_5^k x^k$,$\therefore k=3$,$\therefore -m^2C_5^3=-20$,解得$m^2=2$.

6.【答案】A.

【命题意图】考查函数的性质,反比例函数、指数函数、对数函数的图象,函数变换.考查转化化归思想.考查数学运算,直观想象等数学核心素养.

【解析】由条件得,$y=\frac{3}{1+x^{-1}}+1$,$\therefore y=4-\frac{3}{x+1}$,将该函数图象向右平移一个单位长度,再向下平移四个单位长度得到$y=-\frac{3}{x}$的图象,再把曲线$y=-\frac{3}{x}$上各点的横坐标不变,纵坐标变为原来的$\frac{1}{3}$,就得到$y=-\frac{1}{x}$的图象,再作出曲线$y=-\frac{1}{x}$关于$x$轴对称的图象,得到函数$y=\frac{1}{x}$的图象.

7.【答案】B.

【命题意图】考查正态分布,二项分布.考查逻辑推理数学核心素养.

【解析】$\because \xi\sim N(7.6,\sigma^2)(\sigma>0)$,$P(7.2<\xi\leqslant 8)=0.68$,$\therefore P(7.6<\xi\leqslant 8)=0.34$,$\because$ 8940名民兵的射击成绩中有$\eta$个在区间$(7.6,8]$上,$\therefore \eta\sim B(8940,0.34)$.

8.【答案】B.

【命题意图】考查球,截面面积,平面与平面垂直,正弦定理.考查数学直观,数学运算等数学核心素养.

【解析】$\because$球$O$的表面积为$16\pi$,$\therefore$球$O$的半径为2.$\because$点$A$在平面$BCD$的射影是线段$BC$的中点,$\therefore AB=AC$,平面$ABC\perp$平面$BCD$.$\because AB=BC=2\sqrt{3}$,$\therefore\triangle ABC$是边长为$2\sqrt{3}$的等边三角形,设$\triangle ABC$外接圆半径为$r$,$2r=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$,$r=2$,$\therefore\triangle ABC$外接圆圆心就是球心$O$,$\therefore BC$就是$\triangle BCD$外接圆的直径.所以平面$BCD$被球$O$截得的截面面积为$\pi(\sqrt{3})^2=3\pi$.

9.【答案】C.

【命题意图】考查分段函数,数列的单调性,二次函数的性质,不等式,指数函数的性质.考查数

形结合思想. 考查逻辑推理，数学运算等数学核心素养.

【解析】∵$\{a_n\}$是递增数列，$a_n=\begin{cases} an^2-\left(\frac{7}{8}a+\frac{17}{4}\right)n+\frac{17}{2},n\leqslant 2, \\ a^n,n>2 \end{cases}$，∴$a>1$. 根据条件有 $a_1<a_2$ $\left(或-\frac{-\left(\frac{7}{8}a+\frac{17}{4}\right)}{2a}<\frac{3}{2}\right)$，$a_2<a_3$，即 $4a-\frac{7}{4}a<a^3$. 解得 $a>2$.

10.【答案】A.

【命题意图】考查构造函数，利用导数判断函数的单调性和求函数的最小值. 考查直观想象，逻辑推理，数学运算等数学核心素养.

【解析】设 $f(x)=\frac{x}{\ln x}$，则 $f'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$，∴$f'(\mathrm{e})=0$，当 $1<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增. ∴$f(x)_{\min}=f(x)_{极小}=f(\mathrm{e})=\mathrm{e}$. ∴$f(\pi^2)=\frac{\pi^2}{\ln\pi^2}>\mathrm{e}$，即 $\pi^2>2\mathrm{e}\ln\pi$.

11.【答案】D.

【命题意图】考查解三角形，平面向量的运算，平面向量的数量积. 考查数学运算，直观想象等数学核心素养.

【解析】∵$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=0$，∴$PB\perp PC$. ∵$PO\perp BC$，∴$PO^2=BO\cdot OC$. ∵$BO=16$ m，$PO=12$ m，∴$OC=9$ m. 设线段 $AB$ 中点为 $M$，线段 $CD$ 中点为 $N$，∵$\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD})=2\overrightarrow{PO}$，∴则 $O$ 为线段 $MN$ 中点. ∵$AB=8$ m，∴$MO=20$ m，即 $ON=20$ m，∴$CD=22$ m.

12.【答案】A.

【命题意图】考查直线方程，椭圆，等差数列，分类讨论思想. 考查数学运算，数学建模，逻辑推理等数学核心素养.

【解析】在椭圆方程$\frac{9x^2}{200^2}+\frac{y^2}{50^2}=1$中，令 $y=x$，解得 $y=x=\pm 40$，即该椭圆内边平行于对称轴的最大正方形的边长为 80 m. ∵磁砖的边长为 50 cm，正方形图例每边磁砖数为奇数，∴椭圆内最大正方形每边只能贴 159 块磁砖. 把最里面的一块黑磁砖记为第一轮，向外紧挨第一块的一圈白磁砖记为第二轮，向外紧挨第二轮的一圈黑磁砖记为第三轮，依次类推，则第 $n+1$ 轮磁砖数为$(2n+1)^2-(2n-1)^2=8n$，也就是从第二轮起，相邻两圈黑白磁砖数相差 8，即从第二轮起，相邻两圈黑磁砖数相差 16. 由不等式 $2n-1\leqslant 159$ 得 $n\leqslant 80$，只有当 $n$ 为奇数时，磁砖才是黑色的，所以第 79 圈为黑磁砖，共 40 圈(包括中心的一块)，∴该椭圆区域需要的黑色磁砖块数最多是 $39\times 16+\frac{39\times 38}{2}\times 16+1=12481$.

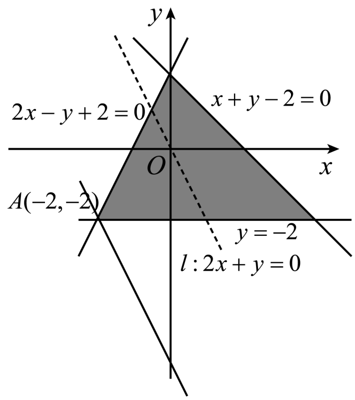
二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13.【答案】4.

【命题意图】考查平面向量的坐标运算,平面向量共线.考查数学运算数学核心素养.

【解析】∵$\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(2,k)$,$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,∴$1\times k-2\times 2=0$,∴$k=4$.

14.【答案】$-6$.




【命题意图】考查简单的线性规划.考查数形结合思想.考查直观想象,数学运算等数学核心素养.

【解析】约束条件$\begin{cases}2x-y+2\geqslant 0,\\ x+y-2\leqslant 0,\\ y\geqslant -2\end{cases}$表示的可行域如图所示,作出直线 $l$:$2x+y=0$,平移直线 $l$ 到该直线经过 $A(-2,-2)$时,$2x+y$ 最小,且最小值为$-6$.

15.【答案】$\left[-\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

【命题意图】考查利用导数求曲线的切线,正弦函数曲线的性质,近似值估算.考查直观想象,数学运算,逻辑推理等数学核心素养.

【解析】由直线 $y=f(x)$的方程得 $f(\alpha)=\sin\alpha$,∴$(\alpha,\sin\alpha)$是直线 $y=f(x)$与曲线 $y=\sin x$ 的一个公共点.由 $y=\sin x$ 得 $y'=\cos x$,∴$y'|_{x=\alpha}=\cos\alpha$,又直线 $y=f(x)$的斜率为 $\cos\alpha$,∴直线 $y=f(x)$是曲线 $y=\sin x$ 在 $x=\alpha$ 处的切线.∵$f(\pi)=0$,∴$(\pi,0)$是直线 $y=f(x)$与曲线 $y=\sin x$ 的一个交点.由于$(\pi,0)$是曲线 $y=\sin x$ 的一个对称中心,∴直线 $y=f(x)$与曲线 $y=\sin x$ 的另一切点横坐标大于 $2\pi>\dfrac{3\pi}{2}$,∴当$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$时,不等式 $f(x)-\sin x\leqslant 0$ 的解集为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

16.【答案】$(-\infty,-32)\cup(0,+\infty)$.

【命题意图】考查直线,双曲线,抛物线,定点,抛物线的准线,双曲线渐近线,函数的值域.考查数形结合思想,函数方程思想,转化化归思想.考查直观想象,数学运算,逻辑推理等数学核心素养.

【解析】设 $A(-1,y_1)$,$B(x_2,0)$.∵$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$,∴$-x_2=-4$,即 $x_2=4$,∴直线 $AB$ 的方程为 $y=k(x-4)$,其中 $k\neq\pm\dfrac{b}{a}$即 $k\neq\pm\sqrt{3}$.分别将 $y=k(x-4)$代入 $y=\dfrac{b}{a}x$ 与 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 得 $M$,$N$ 的坐标分别为$\left(\dfrac{4ak}{ak-b},\dfrac{4bk}{ak-b}\right)$,$\left(\dfrac{4ak}{ak+b},-\dfrac{4bk}{ak+b}\right)$.∴$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\dfrac{16k^2(a^2-b^2)}{a^2k^2-b^2}=\dfrac{32k^2}{3-k^2}=\dfrac{96}{3-k^2}-32$,∵$M$ 与 $N$ 不重合,∴$k\neq 0$,∴$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$的取值范围是$(-\infty,-32)\cup(0,+\infty)$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.【命题意图】考查解三角形，正余弦定理，三角形面积公式，正弦型函数曲线的单调性，三角恒等变换，函数值域. 考查函数方程思想，数形结合思想. 考查逻辑推理和数学运算等数学核心素养.

【解析】本题如果多选，或者选择的番号与所选内容不一致的，均以实际所作解答的第一个计分，所选内容没在题目所给的选项中的，以零分计.

（1）选择①. ∵ $\sin^2 A+\sin B\sin C=\sin^2 B+\sin^2 C$，

∴在△ABC 中由正弦定理得，$a^2+bc=b^2+c^2$，即 $b^2+c^2-a^2=bc$. …………………… 2 分

在△ABC 中由余弦定理得，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$. …………………… 3 分

∵△ABC 是锐角三角形，∴ $A=\dfrac{\pi}{3}$. …………………… 4 分

选择②. ∵ $2a\cos A=b\cos C+c\cos B$，

∴在△ABC 中由正弦定理得，$2\sin A\cos A=\sin B\cos C+\sin C\cos B$， …………………… 1 分

∴ $2\sin A\cos A=\sin(B+C)$， …………………… 2 分

∵ $A+B+C=\pi$，∴ $2\sin A\cos A=\sin A$. …………………… 3 分

又△ABC 是锐角三角形，∴ $\cos A=\dfrac{1}{2}$，$A=\dfrac{\pi}{3}$. …………………… 4 分

选择③. ∵△ABC 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc$，∴ $\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc$. …………………… 2 分

∴ $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. …………………… 3 分

∵△ABC 是锐角三角形，∴ $A=\dfrac{\pi}{3}$. …………………… 4 分

（2）∵ $A=\dfrac{\pi}{3}$，$\cos(\alpha-A)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

∵ $\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{5\pi}{6}$，∴ $0<\alpha-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{2}$，∴ $\alpha-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$，即 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$. …………………… 5 分

∴ $\cos x\sin\left(x+\dfrac{\alpha}{2}\right)=\cos x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin x\cos x+\cos^2 x)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

即 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. …………………… 9 分

$\because 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\therefore\frac{\pi}{4}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$， ………………………………………………………………………………… 10 分

$\therefore\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，即$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{2+\sqrt{2}}{4}$，

所以 $f(x)$的值域为$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right]$. ………………………………………………………………………………… 12 分

18.【命题意图】考查随机抽样，古典概型，超几何分布，独立事件发生的概率，互斥事件概率. 考查数学建模，逻辑推理和数学运算等数学核心素养.

【解析】(1)由表可知，截止 2021 年 12 月 31 日，该县接种腺病毒载体疫苗共 5000 人，其中参加抗洪的有 2500 人. 设“在已接种腺病毒载体疫苗的人员中随机抽取一名，这个人参加了抗洪救灾”为事件 $A$，由题意得

$P(A)=\frac{2500}{5000}=\frac{1}{2}$.

所以，这个人参加了抗洪救灾的概率为$\frac{1}{2}$. ………………………………………………………… 5 分

(2)根据条件，截止 2021 年 12 月 31 日，该县接种新冠灭活疫苗和重组蛋白亚单位疫苗的人员共 120 万人，其中接种灭活疫苗的有 10 万人，接种重组蛋白亚单位疫苗的有 110 万人. 所以用分层抽样的方法抽取 12 人中有 1 人接种灭活疫苗，11 人接种重组蛋白亚单位疫苗. 在接种重组蛋白亚单位疫苗人员中，只有 10 人接种了第三针. 根据有效保护率，接种了第三针的 10 人中，只有 9 人体产生的抗体数量至少提升 5－10 倍. ………………………………… 7 分

从以上分析可知，$\xi$ 的所有可能取值为 0，1，2，3. ………………………………………………… 8 分

$P(\xi=0)=\frac{C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{220}$，$P(\xi=1)=\frac{C_3^2C_9^1}{C_{12}^3}=\frac{27}{220}$，

$P(\xi=2)=\frac{C_3^1C_9^2}{C_{12}^3}=\frac{108}{220}=\frac{27}{55}$，$P(\xi=3)=\frac{C_9^3}{C_{12}^3}=\frac{84}{220}=\frac{21}{55}$.

所以，$\xi$ 的分布列为：

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{220}$ | $\frac{27}{220}$ | $\frac{27}{55}$ | $\frac{21}{55}$ |

……………… 10 分

$\therefore E(\xi)=0\times\frac{1}{220}+1\times\frac{27}{220}+2\times\frac{27}{55}+3\times\frac{21}{55}=2.25$. ………………………………………… 12 分

19.【命题意图】考查空间点线面之间的位置关系，线线、线面平行的性质和判定，多面体的体积. 考查线面角，坐标法解决几何问题. 考查数学直观，数学运算，逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)证明：连接 $BO$ 并延长 $BO$ 交 $AC$ 于 $G$，连接 $DG$. ……………………………… 1 分

$\because AB=AC=6$，$AB\perp AC$，$F$ 是线段 $BC$ 的中点，

$\therefore AF=3\sqrt{2}$. ………………………………………………………………………… 2 分

$\because AO=2\sqrt{2}$,

$\therefore O$ 是$\triangle ABC$ 重心,

$\therefore \dfrac{BO}{OG}=2$. ………………………………………………………………………… 4 分

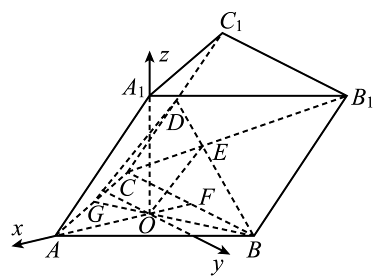
$\because D$ 是侧棱 $CC_1$ 中点,$\therefore BB_1=2CD$,$\dfrac{BE}{ED}=2$.

$\therefore OE /\!/ GD$. ………………………………………………………………………… 5 分

$\because OE \not\subset$ 平面 $AA_1C_1C$,$GD \subset$ 平面 $AA_1C_1C$,

$\therefore OE /\!/$ 平面 $AA_1C_1C$. ………………………………………………………… 6 分

(2)以 $O$ 为原点,分别以直线 $OA$,$OA_1$ 为 $x$ 轴和 $z$ 轴,以过 $O$ 平行于 $CB$ 的直线为 $y$ 轴,建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.




则 $A(2\sqrt{2},0,0)$,$A_1(0,0,2\sqrt{2})$,$B(-\sqrt{2},3\sqrt{2},0)$,

$C(-\sqrt{2},-3\sqrt{2},0)$. …………………………………… 8 分

$\therefore \overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$,

$\overrightarrow{CB}=(0,6\sqrt{2},0)$,$\overrightarrow{OB}=(-\sqrt{2},3\sqrt{2},0)$.

$\therefore \overrightarrow{BE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BD}=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})=\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3},-4\sqrt{2},\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$,

$\therefore \overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BE}=\left(-\dfrac{5\sqrt{2}}{3},-\sqrt{2},\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. ………………………………………… 10 分

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$是平面 $BB_1C_1C$ 一个法向量,则 $\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{CD}$,$\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{CB}$,$\therefore \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0$,$\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}=0$,

$\therefore \begin{cases}-\sqrt{2}x+\sqrt{2}z=0,\\ 6\sqrt{2}y=0\end{cases}$,不妨取 $x=1$,解得 $\boldsymbol{m}=(1,0,1)$.

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{OE},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{OE}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{OE}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{-\sqrt{2}}{\dfrac{2\sqrt{19}}{3}\times\sqrt{2}}=-\dfrac{3\sqrt{19}}{38}$. ………………………………… 11 分

所以,直线 $OE$ 与平面 $BB_1C_1C$ 所成角的正弦值为$\dfrac{3\sqrt{19}}{38}$. ………………………………… 12 分

20.【命题意图】考查椭圆,椭圆的离心率、直线方程.考查数形结合思想,转化化归思想,函数方程思想.考查数学运算,逻辑推理,直观想象等数学核心素养.

【解析】(1)$\because e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=1-\dfrac{b^2}{a^2}$,椭圆 $\Gamma$ 经过点$(1,e)$,

$\therefore \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\left(1-\dfrac{b^2}{a^2}\right)=1$, ………………………………………………………… 3 分

$\therefore b^2=1$,即 $b=1$. …………………………………………………………………… 4 分

(2)$\because b=1$,$\because$ 椭圆 $\Gamma$ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$,即 $x^2+a^2y^2-a^2=0$. ………………………… 5 分

设直线 $l$ 的方程为 $x=ty+m(m\neq 0)$,$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)(x_1x_2\neq 0)$.

将 $x=ty+m$ 代入 $x^2+a^2y^2-a^2=0$ 并化简得,$(t^2+a^2)y^2+2tmy+m^2-a^2=0$. ……… 6 分

$\therefore \Delta=(2tm)^2-4(t^2+a^2)(m^2-a^2)>0$,$y_1+y_2=-\frac{2tm}{t^2+a^2}$,$y_1y_2=\frac{m^2-a^2}{t^2+a^2}$. …………… 7 分

$\therefore x_1+x_2=t(y_1+y_2)+2m=\frac{2a^2m}{t^2+a^2}$,$x_1x_2=(ty_1+m)(ty_2+m)=t^2y_1y_2+tm(y_1+y_2)+m^2$

$=\frac{a^2m^2-a^2t^2}{t^2+a^2}$. ………………………………………………………………………… 8 分

$\because$ 点 $E$ 与 $C$ 关于原点 $O$ 对称,$\therefore E(-x_1,-y_1)$,$\therefore$ 直线 $AE$ 的方程为 $y=\frac{y_1+1}{x_1}x+1$ ①.

直线 $BD$ 的方程为 $y=\frac{y_2+1}{x_2}x-1$ ②. …………………………………………………… 9 分

由①②解得 $F\left(\frac{2x_1x_2}{x_1y_2+x_1-x_2y_1-x_2},\frac{x_1+x_2+x_2y_1+x_1y_2}{x_1y_2+x_1-x_2y_1-x_2}\right)$, ………………………… 10 分

$\therefore$ 直线 $FO$ 的斜率为 $k=\frac{x_1+x_2+x_2y_1+x_1y_2}{2x_1x_2}=\frac{x_1+x_2+(ty_2+m)y_1+(ty_1+m)y_2}{2x_1x_2}$

$=\frac{x_1+x_2+2ty_1y_2+m(y_1+y_2)}{2x_1x_2}=\frac{1}{m+t}$,

$\therefore$ 直线 $FO$ 的方程为 $y=\frac{x}{m+t}$ ③. …………………………………………………… 11 分

把 $x=ty+m$ 代入③解得 $y=1$.

所以,点 $M$ 到 $x$ 轴的距离为 1. ………………………………………………………… 12 分

21.【命题意图】考查导数及其应用,极值,函数的零点,函数单调性,构造法.考查分类讨论思想,数形结合思想,转化化归思想,函数方程思想.考查数学运算,逻辑推理,数学抽象等数学核心素养.

【解析】(1)$\because f(x)=\mathrm{e}^x-x^{\mathrm{e}}$,$\therefore f'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x^{\mathrm{e}-1}=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{1+(\mathrm{e}-1)\ln x}=\mathrm{e}^x[1-\mathrm{e}^{1-x+(\mathrm{e}-1)\ln x}]$, ………………………………………………………………………………………………… 2 分

设 $g(x)=1-x+(\mathrm{e}-1)\ln x$,则 $g'(x)=\frac{\mathrm{e}-1-x}{x}$.当 $0<x<\mathrm{e}-1$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增;当 $x>\mathrm{e}-1$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减. ……………………………………………… 3 分

又 $g(1)=g(\mathrm{e})=0$,$f'(1)=f'(\mathrm{e})=0$,$\therefore$ 当 $0<x<1$,或 $x>\mathrm{e}$ 时,$g(x)<0$,即 $f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;当 $1<x<\mathrm{e}$ 时,$g(x)>0$,即 $f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减. ……………… 5 分

综上所述,$f(x)$ 的增区间是 $(0,1]$,$[\mathrm{e},+\infty)$,减区间是 $[1,\mathrm{e}]$. ………………………… 6 分

(2)当 $0<x<1$ 时，$0<x^{e}<1$，$e^{x}>1$，$\therefore f(x)=e^{x}-x^{e}>0$.

由(1)可知，$f(x)_{\min}=f(x)_{极小}=f(e)=0$，$\therefore f(x)=e^{x}-x^{e}\geqslant 0$，

$\therefore e^{x}\geqslant x^{e}$. ………………………………………………………………………… 8 分

先解决存在正数 $m$，对任意 $x\in(0,a](a\in\mathbf{N}^{*})$，$(m+20x-x^{2})e^{x}\leqslant e^{7}x$ 恒成立，求 $a$ 的最大值的问题. 这个问题等价于存在正数 $m$，对任意 $x\in(0,a](a\in\mathbf{N}^{*})$，$m\leqslant x^{2}+xe^{7-x}-20x$ 恒成立，也就是对任意 $x\in(0,a](a\in\mathbf{N}^{*})$，$0<x^{2}+xe^{7-x}-20x$ 恒成立，求 $a$ 的最大值.

$\therefore$ 对任意 $x\in(0,a](a\in\mathbf{N}^{*})$，$x+e^{7-x}-20>0$ 恒成立. ……………………………… 9 分

设 $h(x)=x+e^{7-x}-20$，则 $h'(x)=1-e^{7-x}$. 当 $0<x<7$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x>7$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增. 所以，$h(x)_{\min}=h(x)_{极小}=h(7)=-12<0$.

$\because h(6)=e-14<0$，$h(5)=e^{2}-15<0$，$h(4)=e^{3}-16>0$，

$\therefore$ 存在正数 $m$，对任意 $x\in(0,a](a\in\mathbf{N}^{*})$，$(m+20x-x^{2})e^{x}\leqslant e^{7}x$ 恒成立，

整数 $a$ 的最大值是 4. ………………………………………………………………………… 10 分

$\because$ 当 $0<x<20$ 时，$m+20x-x^{2}=-(x-10)^{2}+100+m>0$，

$\therefore$ 存在正数 $m$，对任意 $x\in(0,4]$，$(m+20x-x^{2})x^{e}\leqslant e^{7}x$ 恒成立. 也就是说存在正数 $m$，对任意 $x\in(0,4]$，$x+\dfrac{e^{7}}{x^{e}}-20>0$ 恒成立. ……………………………………………………… 11 分

又当 $x=5$ 时，$5+\dfrac{e^{7}}{5^{e}}-20=\dfrac{e^{7}-15\times 5^{e}}{5^{e}}<0$，

所以，所求的整数 $a$ 的最大值是 4. …………………………………………………………… 12 分

**(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.**

22.【命题意图】考查参数方程和极坐标方程的互化，极坐标方程和直角坐标方程的互化，参数方程和普通方程的互化，图形变换. 考查数形结合思想，转化化归思想. 考查数学运算，直观想象，逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入 $x=5+2\cos\alpha$，$y=\sqrt{3}+2\sin\alpha$ 并整理得

$\rho\cos\theta-5=2\cos\alpha$，$\rho\sin\theta-\sqrt{3}=2\sin\alpha$，……………………………………………… 1 分

两式平方相加得 $(\rho\cos\theta-5)^{2}+(\rho\sin\theta-\sqrt{3})^{2}=4$，

化简得圆 $C$ 的极坐标方程为 $\rho^{2}-10\rho\cos\theta-2\sqrt{3}\rho\sin\theta+24=0$. ………………………… 3 分

将 $\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$ 代入 $\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta=3$ 得直线 $l_1$ 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y-3=0$，

即 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$，…………………………………………………………………… 4 分

所以直线 $l_2$ 的直角坐标方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$. …………………………………………………… 5 分

(2)$\because l_2$ 的直角坐标方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，$\therefore l_2$ 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$. ………………… 6 分

设点 $A,B$ 对应该的极径分别为 $\rho_A,\rho_B$.

将$\therefore\theta=\frac{\pi}{6}$代入方程 $\rho^2-10\rho\cos\theta-2\sqrt{3}\rho\sin\theta+24=0$ 化简得 $\rho^2-6\sqrt{3}\rho+24=0$.

$\therefore\rho_A+\rho_B=6\sqrt{3},\rho_A\rho_B=24$.

$\therefore|AB|=|\rho_A-\rho_B|=\sqrt{(\rho_A+\rho_B)^2-4\rho_A\rho_B}=2\sqrt{3}$. ………………………………………… 7 分

设圆 $C$ 的圆心为 $C$，则 $\cos\angle ACB=\frac{|CA|^2+|CB|^2-|AB|^2}{2|CA|\cdot|CB|}=\frac{4+4-12}{2\times2\times2}=-\frac{1}{2}$. …… 8 分

$\therefore$劣弧$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角为$\frac{2\pi}{3}$，优弧$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角为$\frac{4\pi}{3}$，……………………………… 9 分

所以，优弧$\overset{\frown}{AB}$和劣弧$\overset{\frown}{AB}$长度的比值为 2. ………………………………………………… 10 分

23.【命题意图】考查绝对值不等式和重要不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$. 考查分类讨论思想，数形结合思想，转化化归思想等数学思想. 考查数学运算，逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)当 $x\leqslant a$ 时，$f(x)=x+a$，由不等式 $f(x)\geqslant5a$ 得，$x+a\geqslant5a$，$\therefore x\geqslant4a$. 若 $a>0$，则 $f(x)\geqslant5a$ 的解集为$\varnothing$，若 $a\leqslant0$，则 $f(x)\geqslant5a$ 的解集为$\{x|4a\leqslant x\leqslant a\}$. ………………… 2 分

当 $x>a$ 时，$f(x)=3x-a$，由不等式 $f(x)\geqslant5a$ 得，$3x-a\geqslant5a$，$\therefore x\geqslant2a$. 若 $a>0$，则 $f(x)\geqslant5a$ 解集为$\{x|x\geqslant2a\}$，若 $a\leqslant0$，则 $f(x)\geqslant5a$ 的解集为$\{x|x>a\}$. ……………… 4 分

综上所述，当 $a>0$ 时，原不等式的解集为$\{x|x\geqslant2a\}$；当 $a<0$ 时，原不等式的解集为$\{x|x\geqslant4a\}$.

$\because$不等式 $f(x)\geqslant5a$ 的解集为$[2,+\infty)$，

所以，$a=1$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知，$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=2$，即$\frac{1}{m}+1+\frac{1}{n}+1=4$，$\therefore\frac{m+1}{m}+\frac{n+1}{n}=4$，

$\therefore\frac{1}{4}\left(\frac{m+1}{m}+\frac{n+1}{n}\right)=1$. …………………………………………………………… 7 分

$\because m>0,n>0$，

$\therefore\frac{2m+1}{m+1}+\frac{2n+1}{n+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{m+1}{m}+\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{m}{m+1}+\frac{n}{n+1}\right)+2=\frac{1}{4}\left[2+\frac{n(m+1)}{m(n+1)}+\frac{m(n+1)}{n(m+1)}\right]+2$

$\geqslant\frac{1}{4}\left[2+2\sqrt{\frac{n(m+1)}{m(n+1)}\cdot\frac{m(n+1)}{n(m+1)}}\right]+2=3$，等号在$\frac{n(m+1)}{m(n+1)}=\frac{m(n+1)}{n(m+1)}$，即 $m=n=1$ 时成立.

……………………………………………………………………………………… 9 分

所以，$\frac{2m+1}{m+1}+\frac{2n+1}{n+1}$的最小值为 3. …………………………………………………… 10 分