文科数学参考解答及评分参考

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解答与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制定相应的评分细则.

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再得分.

3. 解答右端所注分数，表示该生正确做到这一步应该得的累加分数.

4. 只给整数分数. 选择题不给中间分.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.【答案】B.

【命题意图】考查集合的表示法，集合的基本运算. 考查数形结合思想. 考查数学运算数学核心素养.

【解析】集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=[0,3)$，所以 $A\cap B=[0,2]$.

注：本题考查目的是集合的表示与基本运算，所以没有在区间端点处设置障碍.

2.【答案】D.

【命题意图】考查复数的基本概念，复数代数运算. 考查数学运算数学核心素养.

【解析】复数 $z_1=\dfrac{1}{\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$，$z_2=\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$，$\therefore 2z_1+z_2=1-\mathrm{i}$，复平面内表示这个复数的点在第四象限.

3.【答案】C.

【命题意图】考查充要条件，抛物线与双曲线的基本性质. 考查直观想象，逻辑推理数学核心素养.

【解析】若 F 是抛物线 $y^2=12x$ 的焦点，则 F 的坐标为 $(3,0)$，而 $(3,0)$ 也是双曲线 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 的右焦点，所以前者是后者的充分条件. 若 F 是双曲线 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 的焦点，则 F 的坐标可能是

$(-3,0)$，而$(-3,0)$不是抛物线 $y^2=12x$ 的焦点，即前者不是后者的必要条件. ∴C 正确.

4.【答案】D.

【命题意图】考查分段函数. 考查数学运算数学核心素养.

【解析】由条件知，$f(-\mathrm{e})=(-\mathrm{e})^2=\mathrm{e}^2$，$f(\mathrm{e}^2)=\ln \mathrm{e}^2=2$，所以 D 正确.

5.【答案】A.

【命题意图】考查正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 及其图象的性质，周期，零点. 考查数形结合思想. 考查直观想象，数学运算等数学核心素养.

【解析】设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T，因为 $\omega>0$，根据条件，$nT=2\left[\frac{\pi}{12}-\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]=\pi(n\in\mathbf{N}^*)$，即$\frac{2n\pi}{\omega}=\pi$，所以 $\omega=2n(n\in\mathbf{N}^*)$，∴$\omega$ 的最小正数为 2.

6.【答案】A.

【命题意图】考查指数函数，幂函数与对数函数的性质，指数与对数运算. 考查直观想象，逻辑推理，数学运算等数学核心素养.

【解析】设 $f(x)=2^x-x^2$，则 $f(2)=f(4)=0$，当 $2<x<4$ 时，$f(x)<0$，∴A 正确. 当 $0<x<2$ 或 $x>4$ 时，$f(x)>0$，∴BC 错误. $2^{\sqrt{2}}>2^1=2=\log_{\sqrt{2}}2$，∴D 错误.

7.【答案】D.

【命题意图】考查三视图，数列，数列通项及通项公式，数列前 n 项和. 考查分类讨论思想. 考查数学建模，直观想象等数学核心素养.

【解析】从最上面第一层(只有一个)开始往下到第 n 层止，几何体正视图与侧视图的小正方体个数，可以用公式 A 计算. 几何体每一层(几何体俯视图)的小正方体个数，或者从第二层开始每层增加的小正方体个数累计与第一层小正方体个数之和可以用公式 B 计算. 几何体的全部小正方体的个数可以用公式 C 计算. 不能用的公式是 D.

8.【答案】A.

【命题意图】考查函数的性质，反比例函数、指数函数、对数函数的图象，函数变换. 考查转化化归思想. 考查数学运算，直观想象等数学核心素养.

【解析】由条件得，$y=\frac{3}{1+x^{-1}}+1$，∴$y=4-\frac{3}{x+1}$，将该函数图象向右平移一个单位长度，再向下平移四个单位长度得到 $y=-\frac{3}{x}$的图象，再把曲线 $y=-\frac{3}{x}$上各点的横坐标不变，纵坐标变为原来的$\frac{1}{3}$，就得到 $y=-\frac{1}{x}$的图象，再作出曲线 $y=-\frac{1}{x}$关于 x 轴对称的图象，得到函数 $y=\frac{1}{x}$的图象.

9.【答案】B.

【命题意图】考查球，截面面积，平面与平面垂直，正弦定理. 考查数学直观，数学运算等数学核心素养.

【解析】∵球 O 的体积为$\frac{32\pi}{3}$，∴球 O 的半径为 2. ∵点 A 在平面 BCD 的射影是线段 BC 的中点，∴$AB=AC$，平面 $ABC\perp$ 平面 BCD. ∵$AB=BC=2\sqrt{3}$，∴$\triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形，设$\triangle ABC$ 外接圆半径为 r，$2r=\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$，$r=2$，∴$\triangle ABC$ 外接圆圆心就是球心 O，∴BC 就是$\triangle BCD$ 外接圆的直径. 所以平面 BCD 被球 O 截得的截面面积为 $\pi(\sqrt{3})^2=3\pi$.

10.【答案】C.

【命题意图】考查三角恒等变换，和角公式，倍角公式，三角函数符号，三角函数的值域. 考查转化化归思想，函数方程思想. 考查逻辑推理，数学运算等数学核心素养.

【解析】∵$\pi<x<\frac{3\pi}{2}$，∴$\sin x+\cos x<0$，$\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{4}$，∴$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}>0$，$\cos\frac{x}{2}<0$.

$$\therefore f(x)=\frac{\left(1-\sqrt{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x}\right)\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}\times 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x}}$$

$$=\frac{(1+\sin x+\cos x)\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2+2\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)}}=\frac{\left(1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)}{-2\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos x,$$

所以，$f(x)$的值域是$(-1,0)$.

11.【答案】D.

【命题意图】考查解三角形，平面向量的运算，平面向量的数量积. 考查数学运算，直观想象等数学核心素养.

【解析】∵$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=0$，∴$PB\perp PC$. ∵$PO\perp BC$，∴$PO^2=BO\cdot OC$. ∵$BO=16$ m，$PO=12$ m，∴$OC=9$ m. 设线段 AB 中点为 M，线段 CD 中点为 N，∵$\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD})=2\overrightarrow{PO}$，∴则 O 为线段 MN 中点. ∵$AB=8$ m，∴$MO=20$ m，即 $ON=20$ m，∴$CD=22$ m.

12.【答案】B.

【命题意图】考查解三角形，平面向量的数量积，正(余)弦定理，三角形面积公式. 考查数学运算，逻辑推理等数学核心素养.

【解析】$\because \cos^2A+\sin^2B+\sin^2C+\sin B\sin C=1$，$\therefore \sin^2B+\sin^2C+\sin B\sin C=1-\cos^2A$，即 $\sin^2B+\sin^2C+\sin B\sin C=\sin^2A$，由正弦定理得 $b^2+c^2+bc=a^2$，由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，$\because 0<A<\pi$，$\therefore A=\dfrac{2\pi}{3}$. $\because \angle CAD=3\angle BAD$，$\therefore \angle CAD=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{6}$. $\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3$，$AB=2$，$\therefore 2AC\cos\dfrac{2\pi}{3}=-3$，解得 $AC=3$. $\because \triangle BAD$ 的面积与 $\triangle CAD$ 的面积和等于 $\triangle ABC$ 的面积，$\therefore \dfrac{1}{2}\times 2AD\sin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}\times 3AD\sin\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{1}{2}\times 2\times 3\sin\dfrac{2\pi}{3}$，解得 $AD=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

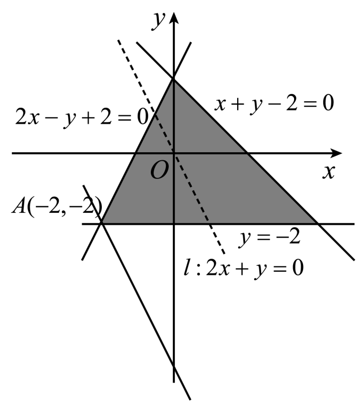
13.【答案】4.

【命题意图】考查平面向量的坐标运算，平面向量共线. 考查数学运算数学核心素养.

【解析】$\because \boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,k)$，$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$，$\therefore 1\times k-2\times 2=0$，$\therefore k=4$.

14.【答案】-6.

【命题意图】考查简单的线性规划. 考查数形结合思想. 考查直观想象，数学运算等数学核心素养.



【解析】约束条件 $\begin{cases}2x-y+2\geqslant 0,\\ x+y-2\leqslant 0,\\ y\geqslant -2\end{cases}$ 表示的可行域如图所示，作出直线 l：$2x+y=0$，平移直线 l 到该直线经过 $A(-2,-2)$ 时，$2x+y$ 最小，且最小值为 -6.

15.【答案】$(-\infty,-32]\cup(0,+\infty)$.

【命题意图】考查直线，双曲线，双曲线渐近线，函数的值域. 考查数形结合思想，函数方程思想，转化化归思想. 考查直观想象，数学运算，逻辑推理等数学核心素养.

【解析】设直线 l 的方程为 $x=ty+4$，其中 $t\neq\pm\dfrac{a}{b}$，即 $t^2\neq\dfrac{1}{3}$. 分别将 $x=ty+4$ 代入 $y=\dfrac{b}{a}x$ 与 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 得 A，B 的坐标分别为 $\left(\dfrac{4a}{a-bt},\dfrac{4b}{a-bt}\right)$，$\left(\dfrac{4a}{a+bt},-\dfrac{4b}{a+bt}\right)$. $\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{16(a^2-b^2)}{a^2-b^2t^2}=\dfrac{32-16e^2}{1-(e^2-1)t^2}=\dfrac{32}{3t^2-1}$，$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的取值范围是 $(-\infty,-32]\cup(0,+\infty)$.

16.【答案】$\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{45}{2}$（或 $x^2+y^2-7x-3y-8=0$）.

【命题意图】考查三次函数，利用导数求曲线的切线，直线方程，利用斜率判断两直线垂直，圆

的方程. 考查直观想象，数学运算，逻辑推理等数学核心素养.

【解析】∵ $f(x)=\frac{1}{9}(x+1)(2x^2-8x-1)$，∴ $f(-1)=0$，即 $A(-1,0)$. 又 $f'(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x-1$，

∴ $f'(-1)=1$，∴曲线 $y=f(x)$ 以 $A(-1,0)$ 为切点的切线 l_1 的方程为 $y=f'(-1)(x+1)$，即 $y=x+1$. 将 $y=x+1$ 代入曲线 $y=f(x)$ 的方程得直线 l_1 与曲线 $y=f(x)$ 的另一公共点为 $B(5,6)$. 当 $A(-1,0)$ 不是切点时，若直线 l_2 过 $A(-1,0)$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切，设切点为 $C(x_0,y_0)$，此时切线 l_2 的方程为 $y-\frac{1}{9}(x_0+1)(2x_0^2-8x_0-1)=\left(\frac{2}{3}x_0^2-\frac{4}{3}x_0-1\right)(x-x_0)$，将 $x=-1$，$y=0$ 代入该方程求得 $x_0=2$，∴ $y_0=-3$，切线 l_2 的方程为 $y=-x-1$. ∴ $l_1\perp l_2$.

∴所求圆是以 BC 为直径的圆，因此所求方程为 $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{45}{2}$（或 $x^2+y^2-7x-3y-8=0$）.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.【命题意图】考查数列的递推关系，通项，前 n 项和，等差数列，等比数列. 考查函数方程思想. 考查逻辑推理和数学运算等数学核心素养.

【解析】本题如果多选，或者选择的番号与所选内容不一致的，均以实际所作解答的第一个计分，所选内容没在题目所给的选项中的，以零分计.

(1)选择①. ∵ $a_n+a_{n+1}=4n$，∴ $a_1+a_2=4$，$a_{n+1}+a_{n+2}=4n+4$， …………………… 2 分

∴ $a_{n+2}-a_n=4$，∵ $a_1=1$，∴ $a_2=3$， …………………… 3 分

∴ $\{a_{2n-1}\}$ 与 $\{a_{2n}\}$ 是分别以 1，3 为首项，以 4 为公差的等差数列，…………………… 4 分

∴ $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，以 2 为公差的等差数列， …………………… 5 分

所以 $a_n=2n-1$. …………………… 6 分

选择②. ∵ $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\cdots+\sqrt{S_n}=\frac{n(n+1)}{2}$，

∴ $\sqrt{a_1}=1$，即 $a_1=1$，且当 $n\geqslant 2$ 时，$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\cdots+\sqrt{S_{n-1}}=\frac{(n-1)n}{2}$，…………………… 2 分

∴ $\sqrt{S_n}=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{(n-1)n}{2}=n$，即 $S_n=n^2$ …………………… 4 分

∴ $a_n=n^2-(n-1)^2=2n-1$，…………………… 5 分

当 $n=1$ 时，$2n-1=1$，

所以 $a_n=2n-1$. …………………… 6 分

选择③. $\because 4S_n-1=a_n^2+2a_n$ ①,

$\therefore 4a_1-1=a_1^2+2a_1$,即 $a_1=1$,且当 $n\geqslant 2$ 时,$4S_{n-1}-1=a_{n-1}^2+2a_{n-1}$ ②. …………… 2 分

①－②得,$4(S_n-S_{n-1})=a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}$,即 $4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}$,

$\therefore (a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})=2(a_n+a_{n-1})$. …………………………………………………… 4 分

$\because a_n>0, a_n+a_{n-1}>0, \therefore a_n-a_{n-1}=2$,

$\therefore \{a_n\}$是以 1 为首项,以 2 为公差的等差数列, …………………………………………… 5 分

所以 $a_n=2n-1$. ………………………………………………………………………………… 6 分

(2)设 $b_n=2^{a_n}$,则 $b_n=2^{2n-1}=2\times 4^{n-1}$,$\therefore \{b_n\}$是以 2 为首项,以 4 为公比的等比数列,………

……………………………………………………………………………………………… 8 分

$\therefore \{b_n\}$各项均是正整数,$\{b_n\}$的前 n 和 T_n 也是正整数. …………………………………… 9 分

$\therefore T_n=\frac{2(1-4^n)}{1-4}=\frac{2^{2n+1}-2}{3}$是正整数, ……………………………………………… 11 分

所以,对一切 $n\in \mathbf{N}^*$,$2^{2n+1}-2$ 能被 3 整除. …………………………………………… 12 分

18.【命题意图】考查随机抽样,古典概型,互斥事件概率.考查数学建模,逻辑推理,数据分析和数学运算等数学核心素养.

【解析】(1)由表可知,截止 2021 年 12 月 31 日,该县接种腺病毒载体疫苗共 5000 人,其中参加抗洪的有 2500 人.设"在已接种腺病毒载体疫苗的人员中随机抽取一名,这个人参加了抗洪救灾"为事件 A,由题意得

$P(A)=\frac{2500}{5000}=\frac{1}{2}$.

所以,这个人参加了抗洪救灾的概率为$\frac{1}{2}$. ……………………………………………………… 5 分

(2)根据条件,截止 2021 年 12 月 31 日,该县接种新冠灭活疫苗和重组蛋白亚单位疫苗的人员共 120 万人,其中接种灭活疫苗的有 10 万人,接种重组蛋白亚单位疫苗的有 110 万人,这 110 万人中,只有 100 万人接种了第三针,根据有效保护率,只有 90 万人人体产生的抗体数量至少提升 5－10 倍.所以以人体产生的抗体数量是否至少提升 5－10 倍为依据用分层抽样的方法抽取 4 人,有 1 人人体产生的抗体数量不足以提升 5－10 倍,3 人人体产生的抗体数量至少提升 5－10 倍. ……………………………………………………………………… 8 分

设抽取的 4 人中人体产生的抗体数量不足以提升 5－10 倍的那个人为 A,剩下的 3 人分别为 B_1,B_2,B_3.从这 4 人中随机抽取 2 人,所有可能结果分别为 $AB_1,AB_2,AB_3,B_1B_2,B_1B_3,B_2B_3$,共 6 个结果,其中 2 人均为人体产生的抗体数量至少提升 5－10 倍的疫苗接种者的结果有 B_1B_2,B_1B_3,B_2B_3,共 3 个结果. ……………………………………………………… 10 分

设“2 人均为人体产生的抗体数量至少提升 5－10 倍的疫苗接种者”为事件 C，则

$P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

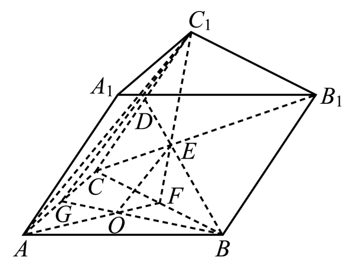
所以，2 人均为人体产生的抗体数量至少提升 5－10 倍的疫苗接种者的概率为$\frac{1}{2}$. …… 12 分

19.【命题意图】考查空间点线面之间的位置关系，线线、线面、面面平行及垂直的性质和判定. 考查公理 1，公理 3 及两平行直线是平面直线. 考查数学抽象，数学直观，数学运算，逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)证明：连接 BO 并延长 BO 交 AC 于 G，连接 DG. ………………………………… 1 分

$\because AB=AC=6, AB\perp AC$，$F$ 是线段 BC 的中点，

$\therefore AF=3\sqrt{2}$. ………………………………………………… 2 分



$\because AO=2\sqrt{2}$，

$\therefore O$ 是$\triangle ABC$ 重心，

$\therefore \frac{BO}{OG}=2$. ………………………………………………… 4 分

$\because D$ 是侧棱 CC_1 中点，$\therefore BB_1=2CD, \frac{BE}{ED}=2$.

$\therefore OE/\!/GD$. ……………………………………………………………………………… 5 分

$\because OE\not\subset$平面 AA_1C_1C，$GD\subset$平面 AA_1C_1C，

$\therefore OE/\!/$平面 AA_1C_1C. ………………………………………………………………… 6 分

(2)连接 AC_1. 由(1)知，$GD/\!/AC_1$，即 $OE/\!/AC_1$. ……………………………………… 7 分

$\therefore$不同四点 A, C_1, E, O 在同一平面内，这个平面就是平面 AC_1EO. ……………………… 8 分

$\because$直线 AO 交直线 BC 于点 F，$\therefore F\in$直线 AO，即 $F\in$平面 AC_1EO. ……………………… 9 分

又 $F\in$直线 BC，$BC\subset$平面 BB_1C_1C，$\therefore F\in$平面 BB_1C_1C. …………………………… 10 分

$\because$平面 $AC_1EO\cap$平面 $BB_1C_1C=$直线 C_1E，

$\therefore F\in$直线 C_1E，即三点 F, E, C_1 在一条直线上. …………………………………… 11 分

所以$\frac{EF}{EC_1}=\frac{FO}{OA}=\frac{1}{2}$. ………………………………………………………………… 12 分

20.【命题意图】考查椭圆，椭圆的离心率、直线方程. 考查数形结合思想，转化化归思想，函数方程思想. 考查数学运算，逻辑推理，直观想象等数学核心素养.

【解析】(1)$\because e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}$，椭圆 Γ 经过点$(1, e)$，

$\therefore \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)=1$， ………………………………………………………… 3 分

$\therefore b^2=1$,即 $b=1$. ………………………………………………………………… 4 分

(2)$\because b=1$,$\because$ 椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$,即 $x^2+ay^2-a^2=0$. ………………………… 5 分

设直线 l 的方程为 $x=ty+m(m\neq 0)$,$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)(x_1x_2\neq 0)$.

将 $x=ty+m$ 代入 $x^2+a^2y^2-a^2=0$ 并化简得,$(t^2+a^2)y^2+2tmy+m^2-a^2=0$. ……… 6 分

$\therefore \Delta=(2tm)^2-4(t^2+a^2)(m^2-a^2)>0$,$y_1+y_2=-\frac{2tm}{t^2+a^2}$,$y_1y_2=\frac{m^2-a^2}{t^2+a^2}$. …………… 7 分

$\therefore x_1+x_2=t(y_1+y_2)+2m=\frac{2a^2m}{t^2+a^2}$,$x_1x_2=(ty_1+m)(ty_2+m)=t^2y_1y_2+tm(y_1+y_2)+m^2$

$=\frac{a^2m^2-a^2t^2}{t^2+a^2}$. ………………………………………………………………… 8 分

$\because$ 点 E 与 C 关于原点 O 对称,$\therefore E(-x_1,-y_1)$,$\therefore$ 直线 AE 的方程为 $y=\frac{y_1+1}{x_1}x+1$ ①.

直线 BD 的方程为 $y=\frac{y_2+1}{x_2}x-1$ ②. ……………………………………………… 9 分

由①②解得 $F\left(\frac{2x_1x_2}{x_1y_2+x_1-x_2y_1-x_2},\frac{x_1+x_2+x_2y_1+x_1y_2}{x_1y_2+x_1-x_2y_1-x_2}\right)$, ………………………… 10 分

$\therefore$ 直线 FO 的斜率为 $k=\frac{x_1+x_2+x_2y_1+x_1y_2}{2x_1x_2}=\frac{x_1+x_2+(ty_2+m)y_1+(ty_1+m)y_2}{2x_1x_2}$

$=\frac{x_1+x_2+2ty_1y_2+m(y_1+y_2)}{2x_1x_2}=\frac{1}{m+t}$,

$\therefore$ 直线 FO 的方程为 $y=\frac{x}{m+t}$ ③. ………………………………………………… 11 分

把 $x=ty+m$ 代入③解得 $y=1$.

所以,点 M 到 x 轴的距离为 1. ……………………………………………………… 12 分

21.【命题意图】考查导数及其应用,极值,函数的零点,函数单调性,构造法.考查分类讨论思想,数形结合思想,转化化归思想,函数方程思想.考查数学运算,逻辑推理,数学抽象等数学核心素养.

【解析】(1)$\because f(x)=\mathrm{e}^x-x^{\mathrm{e}}$,$\therefore f'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x^{\mathrm{e}-1}=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{1+(\mathrm{e}-1)\ln x}=\mathrm{e}^x[1-\mathrm{e}^{1-x+(\mathrm{e}-1)\ln x}]$, …
……………………………………………………………………………… 2 分

设 $g(x)=1-x+(\mathrm{e}-1)\ln x$,则 $g'(x)=\frac{\mathrm{e}-1-x}{x}$.当 $0<x<\mathrm{e}-1$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增;当 $x>\mathrm{e}-1$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减. ………………………………………… 3 分

又 $g(1)=g(\mathrm{e})=0$,$f'(1)=f'(\mathrm{e})=0$,$\therefore$ 当 $0<x<1$,或 $x>\mathrm{e}$ 时,$g(x)<0$,即 $f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;当 $1<x<\mathrm{e}$ 时,$g(x)>0$,即 $f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减. ……………………… 5 分

综上所述，$f(x)$的增区间是$(0,1]$，$[\mathrm{e},+\infty)$，减区间是$[1,\mathrm{e}]$. ………………………………………… 6 分

(2)$\because x>\mathrm{e}$，$\therefore \mathrm{e}\ln x[\ln x-\ln(\ln x)]<x$ 的充要条件是$\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^{\mathrm{e}}<\mathrm{e}^{\frac{x}{\ln x}}$. ………………………… 8 分

设 $h(x)=\dfrac{x}{\ln x}$，则 $h'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$h'(x)>h(\mathrm{e})=0$，$\therefore h(x)$在区间$(\mathrm{e},+\infty)$单调递增. $\therefore$当 $x>\mathrm{e}$ 时，$h(x)=\dfrac{x}{\ln x}>h(\mathrm{e})=\mathrm{e}$. ………………………………………… 9 分

由(1)可知，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x-x^{\mathrm{e}}>f(\mathrm{e})=0$，即当 $x>\mathrm{e}$ 时，$\mathrm{e}^x>x^{\mathrm{e}}$.

$\therefore$当 $x>\mathrm{e}$ 时，$\mathrm{e}^{\frac{x}{\ln x}}>\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^{\mathrm{e}}$， ………………………………………… 11 分

所以，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$\mathrm{e}\ln x[\ln x-\ln(\ln x)]<x$. ………………………………………… 12 分

(二)选考题：共 10 分.

22.【命题意图】考查参数方程和极坐标方程的互化，极坐标方程和直角坐标方程的互化，参数方程和普通方程的互化，图形变换. 考查数形结合思想，转化化归思想. 考查数学运算，直观想象，逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入 $x=5+2\cos\alpha$，$y=\sqrt{3}+2\sin\alpha$ 并整理得

$\rho\cos\theta-5=2\cos\alpha$，$\rho\sin\theta-\sqrt{3}=2\sin\alpha$， ………………………………………… 1 分

两式平方相加得$(\rho\cos\theta-5)^2+(\rho\sin\theta-\sqrt{3})^2=4$，

化简得圆 C 的极坐标方程为$\rho^2-10\rho\cos\theta-2\sqrt{3}\rho\sin\theta+24=0$. ………………………… 3 分

将 $\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$ 代入 $\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta=3$ 得直线 l_1 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y-3=0$，

即 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$， ………………………………………… 4 分

所以直线 l_2 的直角坐标方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$. ………………………………………… 5 分

(2)$\because l_2$ 的直角坐标方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，$\therefore l_2$ 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{6}(\rho\in\mathbf{R})$. ………………… 6 分

设点 A，B 对应该的极径分别为 ρ_A，ρ_B.

将$\therefore\theta=\dfrac{\pi}{6}$代入方程 $\rho^2-10\rho\cos\theta-2\sqrt{3}\rho\sin\theta+24=0$ 化简得 $\rho^2-6\sqrt{3}\rho+24=0$.

$\therefore \rho_A+\rho_B=6\sqrt{3}$，$\rho_A\rho_B=24$.

$\therefore |AB|=|\rho_A-\rho_B|=\sqrt{(\rho_A+\rho_B)^2-4\rho_A\rho_B}=2\sqrt{3}$. ………………………………………… 7 分

设圆 C 的圆心为 C，则 $\cos\angle ACB=\dfrac{|CA|^2+|CB|^2-|AB|^2}{2|CA|\cdot|CB|}=\dfrac{4+4-12}{2\times2\times2}=-\dfrac{1}{2}$. …… 8 分

$\therefore$劣弧$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角为$\frac{2\pi}{3}$,优弧$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角为$\frac{4\pi}{3}$, ………………………… 9 分

所以,优弧$\overset{\frown}{AB}$和劣弧$\overset{\frown}{AB}$长度的比值为 2. ………………………………………………… 10 分

23.【命题意图】考查绝对值不等式和重要不等式 $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$. 考查分类讨论思想,数形结合思想,转化化归思想等数学思想. 考查数学运算,逻辑推理等数学核心素养.

【解析】(1)当 $x\leqslant a$ 时,$f(x)=x+a$,由不等式 $f(x)\geqslant 5a$ 得,$x+a\geqslant 5a$,$\therefore x\geqslant 4a$. 若 $a>0$,则 $f(x)\geqslant 5a$ 的解集为$\varnothing$,若 $a\leqslant 0$,则 $f(x)\geqslant 5a$ 的解集为$\{x|4a\leqslant x\leqslant a\}$. ………………… 2 分

当 $x>a$ 时,$f(x)=3x-a$,由不等式 $f(x)\geqslant 5a$ 得,$3x-a\geqslant 5a$,$\therefore x\geqslant 2a$. 若 $a>0$,则 $f(x)\geqslant 5a$ 解集为$\{x|x\geqslant 2a\}$,若 $a\leqslant 0$,则 $f(x)\geqslant 5a$ 的解集为$\{x|x>a\}$. ………………… 4 分

综上所述,当 $a>0$ 时,原不等式的解集为$\{x|x\geqslant 2a\}$;当 $a<0$ 时,原不等式的解集为$\{x|x\geqslant 4a\}$.

$\because$不等式 $f(x)\geqslant 5a$ 的解集为$[2,+\infty)$,

所以,$a=1$. …………………………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)知,$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=2$,即$\frac{1}{m}+1+\frac{1}{n}+1=4$,$\therefore\frac{m+1}{m}+\frac{n+1}{n}=4$,

$\therefore\frac{1}{4}\left(\frac{m+1}{m}+\frac{n+1}{n}\right)=1$. ………………………………………………………………… 7 分

$\because m>0,n>0$,

$\therefore\frac{2m+1}{m+1}+\frac{2n+1}{n+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{m+1}{m}+\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{m}{m+1}+\frac{n}{n+1}\right)+2=\frac{1}{4}\left[2+\frac{n(m+1)}{m(n+1)}+\frac{m(n+1)}{n(m+1)}\right]+2$

$\geqslant\frac{1}{4}\left[2+2\sqrt{\frac{n(m+1)}{m(n+1)}\cdot\frac{m(n+1)}{n(m+1)}}\right]+2=3$,等号在$\frac{n(m+1)}{m(n+1)}=\frac{m(n+1)}{n(m+1)}$,即 $m=n=1$ 时成立.

………………………………………………………………………………………………… 9 分

所以,$\frac{2m+1}{m+1}+\frac{2n+1}{n+1}$的最小值为 3. ………………………………………………… 10 分