

数学试题

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:人教 A 版必修第一册第五章,必修第二册第六章至第七章。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $z = -3i(1-i)$ 在复平面内对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 若三角形的三边长分别为 20, 30, 40, 则该三角形的形状是
A. 锐角三角形 B. 钝角三角形 C. 直角三角形 D. 不能确定的
3. 已知单位向量 a, b 满足 $(a+2b) \cdot (a-b) = -\frac{2}{3}$, 则 a 在 b 上的投影向量为
A. $\frac{1}{3}b$ B. $\frac{1}{2}b$ C. $\frac{2}{3}b$ D. $-\frac{2}{3}b$
4. 已知函数 $f(x) = \tan \frac{x}{a}$, 则“ $a=2$ ”是“ $f(x)$ 的最小正周期为 2π ”的
A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 折扇是我国传统文化的延续,它常以字画的形式体现我国的传统文化,如图 1. 图 2 是某折扇的结构简化图,已知 $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$, $OA = 2$, 若 A, B 之间的弧长为

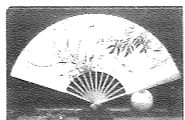


图 1

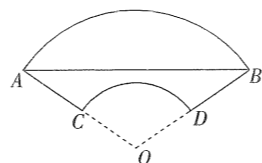
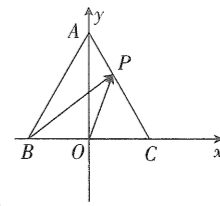


图 2

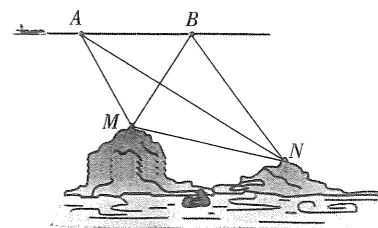
l , 则 $\frac{l}{|AB|} =$

6. 已知 $\varphi > 0$, 函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$, $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq |f(\frac{4\pi}{3})|$, 则 φ 的最小值为
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{5\pi}{6}$
C. $\frac{4\pi}{3}$ D. $\frac{11\pi}{6}$

7. 如图,在平面直角坐标系中, $A(0, 4\sqrt{3}), B(-4, 0), C(4, 0)$, P 是线段 AC 上一点(不含端点),若 $\vec{BP} \cdot \vec{OP} = 32$, 则 $|\vec{OP}| =$
A. $2\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{7}$
C. 4 D. $3\sqrt{3}$



8. 如图,为了测量两山顶 M, N 间的距离,飞机沿水平方向在 A, B 两点进行测量, A, B, M, N 在同一个铅垂平面内. 已知飞机在 A 点时,测得 $\angle MAN = \angle BAN = 30^\circ$, 在 B 点时,测得 $\angle ABM = 60^\circ$, $\angle NBM = 75^\circ$, $AB = 2$ 千米, 则 $MN =$
A. $4\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$ 千米
B. $4 - 2\sqrt{3}$ 千米
C. $\sqrt{3} + 1$ 千米
D. $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ 千米



二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分。

9. 已知点 $A(0, 0), B(2, 1), C(2, 0)$, 则下列结论正确的是
A. $\triangle ABC$ 是直角三角形
B. 若点 $D(4, 1)$, 则四边形 $ACDB$ 是平行四边形
C. 若 $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{AC}$, 则 $P(4, 2)$
D. 若 $\vec{AP} = 2\vec{BP}$, 则 $P(4, 2)$
10. 已知复数 z, z_1, z_2 均不为 0, 则下列说法正确的是
A. 若复数 z 满足 $z^2 \in \mathbf{R}$, 且 $z^2 > 0$, 则 $z \in \mathbf{R}$
B. 若复数 z 满足 $\frac{1}{z} \in \mathbf{R}$, 则 $z \in \mathbf{R}$
C. 若 $z_1 + z_2 \in \mathbf{R}$, 则 $z_1 z_2 \in \mathbf{R}$
D. 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1 \cdot z_2 \in \mathbf{R}$, 则 $\overline{z_1 z_2} \in \mathbf{R}$

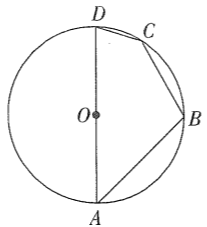
11. 已知函数 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + \frac{1}{\sin(\frac{2\pi}{3} - 2x)}$, 则

- A. $f(x + \frac{\pi}{2}) = f(x)$
- B. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称
- C. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上的最大值为 3
- D. 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到的新图象关于 y 轴对称

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分。

12. 已知 e_1, e_2 是两个不共线的单位向量, $a = e_1 - e_2, b = -2e_1 + ke_2$, 若 a 与 b 共线, 则 $k =$

13. 如图, 四边形 $ABCD$ 的顶点都在圆 O 上, 且 AD 经过圆 O 的圆心, 若圆 O 的半径为 4, $BC=4$, 四边形 $ABCD$ 的面积为 $12\sqrt{3}$, 则 $CD=$ \blacktriangle .



14. 若 a, b, c 均为单位向量, 且 $a \perp b, a \cdot c$ 的取值范围是 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 则 $|3a-2b|$

$=$ \blacktriangle , $\frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ 的取值范围是 \blacktriangle .

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

已知函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) - 2\cos^2 x$.

- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;
- (2) 求 $f(x)$ 的最大值及取得最大值时 x 的取值集合.

16. (15 分)

已知向量 $a = (3, 4), b = (1, x)$.

- (1) 若 $a \perp (a-b)$, 求 $|a-b|$;
- (2) 若 $c = (1, 2), c \parallel (a-2b)$, 求 $a-2b$ 与 a 的夹角的余弦值.

17. (15 分)

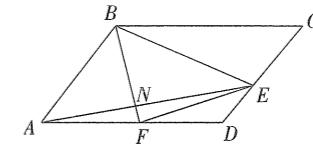
$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 $a, b, c, \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} = \frac{a \sin B}{b}$.

- (1) 求角 A 的大小;
- (2) 若 $b+c = \sqrt{3}a, \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (17 分)

在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB=4, AD=6, \angle BAD = \frac{\pi}{3}$, F 是线段 AD 的中点, $\overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{DC}$, $\lambda \in [-1, 1]$.

- (1) 若 $\lambda = \frac{1}{2}$, AE 与 BF 交于点 N , $\overrightarrow{AN} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AD}$, 求 $x-y$ 的值;
- (2) 求 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{FE}$ 的最小值.



19. (17 分)

若定义在 A 上的函数 $f(x)$ 和定义在 B 上的函数 $g(x)$, 对任意的 $x_1 \in A$, 存在 $x_2 \in B$, 使得 $f(x_1) + g(x_2) = t$ (t 为常数), 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有关系 $P(t)$. 已知函数 $f(x) = 2\cos(2x + \frac{\pi}{6}), x \in [\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}]$.

- (1) 若函数 $g(x) = 4\sin x, x \in \mathbf{R}$, 判断 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否具有关系 $P(2)$, 并说明理由;
- (2) 若函数 $g(x) = 2x+a, x \in [-1, 2]$, 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有关系 $P(4)$, 求 a 的最大值;
- (3) 若函数 $g(x) = \cos^2 x - m \cos x + 5, x \in \mathbf{R}$, 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有关系 $P(3)$, 求 m 的取值范围.