学校____________ 班级____________ 姓名____________ 考号____________

密 封 线 内 不 要 答 题

2024 届高三考试
数学试题(理科)

考生注意:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集 $U=\{-2,-1,0,1,2\}$,集合 $A=\{-1,1,2\}$,$B=\{-2,1\}$,则 $A\cap(\complement_U B)=$

A. $\{2\}$ B. $\{-2\}$ C. $\{-1,2\}$ D. $\{-1,0,2\}$

2. 已知复数 z 满足 $(1-3i)z=7-i$,则 $z=$

A. $1+2i$ B. $1-2i$ C. $-1+2i$ D. $-1-2i$

3. 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{3\pi}{10})$,则下列说法正确的是

A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{10}$ 对称

B. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{4},0)$ 对称

C. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

D. 若将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍,纵坐标不变,可得函数 $y=\sin(x+\frac{3\pi}{10})$ 的图象

4. 已知 $\triangle ABC$ 的每条边长均为 2,D,E 分别是 BC,AC 的中点,则 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 3

5. 曲线 $y=\frac{x}{x-3}$ 在点 $(2,-2)$ 处的切线方程为

A. $y=-3x+4$ B. $y=x-4$ C. $y=3x-8$ D. $y=3x-4$

6. 设椭圆 $C_1:\frac{x^2}{5}+y^2=1$,$C_2:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<3)$ 的离心率分别为 e_1,e_2,若 $e_2=\frac{5}{6}e_1$,则 $b=$

A. 1 B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

7. 已知函数 $f(x)=3^{x(2x-a)}$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递减,则 a 的最小值为

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

8. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $b\cos C-c\cos B=a$,且 $A=2C$,则 $C=$

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{8}$ D. $\frac{\pi}{3}$

9. 已知某圆柱的轴截面是边长为 2 的正方形 $ABCD$,在该圆柱的底面内任取一点 E,则当四棱锥 $E-ABCD$ 的体积最大时,该四棱锥的侧面积为

A. $1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ B. $1+2\sqrt{2}+\sqrt{5}$ C. $1+\sqrt{2}+2\sqrt{5}$ D. $\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

10. 甲、乙两个家庭周末到附近景区游玩,其中甲家庭有 2 个大人和 2 个小孩,乙家庭有 2 个大人和 3 个小孩,他们 9 人在景区门口站成一排照相,要求每个家庭的成员要站在一起,且同一家庭的大人不能相邻,则所有不同站法的种数为

A. 144 B. 864 C. 1728 D. 2880

11. 第 19 届亚运会将于 2023 年 9 月 23 日至 10 月 8 日在杭州举行,某网络直播平台调研"大学生是否喜欢观看体育比赛直播与性别有关",从某高校男、女生中各随机抽取 100 人进行问卷调查,得到如下数据($5\leqslant m\leqslant 15$,$m\in\mathbf{N}$).

	喜欢观看	不喜欢观看
男生	$80-m$	$20+m$
女生	$50+m$	$50-m$

通过计算,有 95% 以上的把握认为大学生喜欢观看直播体育比赛与性别有关,则在被调查的 100 名女生中喜欢观看体育比赛直播的人数的最大值为

附:$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.010	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	6.635	10.828

A. 55 B. 57 C. 58 D. 60

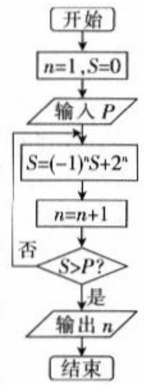
12. 已知 F_1,F_2 分别是双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点,过 F_1 的直线分别交双曲线左、右两支于 A,B 两点,点 C 在 x 轴上,$\overrightarrow{CB}=4\overrightarrow{F_2A}$,$BF_2$ 平分 $\angle F_1BC$,则双曲线 Γ 的渐近线方程为

A. $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$ B. $y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$ C. $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}x$ D. $y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}x$

第Ⅱ卷

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant -1,\\ \frac{x}{3}-y\leqslant 1,\\ x+y\leqslant -1,\end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最小值为___▲___.



14. 执行如图所示的程序框图,若输出的 $n=5$,则输入的正整数 P 的最小值为___▲___,最大值为___▲___.(本题第一空 3 分,第二空 2 分)

15. 黄金比又称黄金律,是指事物各部分间一定的数学比例关系,即将整体一分为二,较小部分与较大部分之比等于较大部分与整体之比,其比值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$,上述比例又被称为黄金分割. 将底和腰之比等于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的等腰三角形称为黄金三角形,若某黄金三角形的一个底角为 C,则 $\cos 2C=$___▲___.

16. 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内接于半径为 2 的球,则该正三棱柱体积的最大值为___▲___.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．（12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=3$，$na_{n+1}=3(n+1)a_n$．

（1）证明：$\{\frac{a_n}{n}\}$是等比数列．

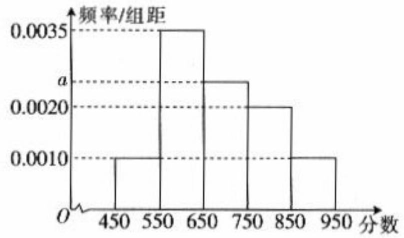
（2）设 $b_n=\frac{n^2}{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n．

18．（12 分）

人工智能（AI）是当今科技领域最热门的话题之一，某学校组织学生参加以人工智能（AI）为主题的知识竞赛，为了解该校学生在该知识竞赛中的情况，现采用随机抽样的方法抽取了 600 名学生进行调查，分数分布在 450～950 分之间，根据调查的结果绘制的学生分数频率分布直方图如图所示．将分数不低于 850 分的学生称为“最佳选手”．

（1）求频率分布直方图中 a 的值，并估计该校学生分数的中位数；

（2）现采用分层抽样的方法从分数落在$[650,750)$，$[850,950]$内的两组学生中抽取 7 人，再从这 7 人中随机抽取 3 人，记被抽取的 3 名学生中属于“最佳选手”的学生人数为随机变量 X，求 X 的分布列及数学期望．

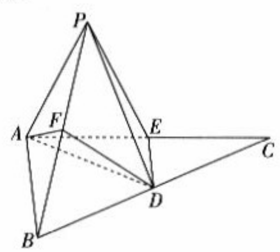


19．（12 分）

将△ABC 沿它的中位线 DE 折起，使顶点 C 到达点 P 的位置，使得 $PA=PE$，得到如图所示的四棱锥 $P-ABDE$，且 $AC=\sqrt{2}AB=2$，$AC\perp AB$，F 为 PB 的中点．

（1）证明：平面 $PAE\perp$平面 $ABDE$．

（2）求直线 PA 与平面 ADF 所成角的正弦值．



20．（12 分）

设函数 $f(x)=a^x+(1-a)x-1(a>0$ 且 $a\neq1)$．

（1）当 $a=\mathrm{e}$ 时，求 $f(x)$的单调区间；

（2）设 $a>1$，证明：当 $x\in(0,1)$时，$f(x)<0$．

21．（12 分）

已知抛物线 C_1 的方程为 $y^2=8x$．

（1）若 M 是 C_1 上的一点，点 N 在 C_1 的准线 l 上，C_1 的焦点为 F，且 $FM\perp FN$，$|MF|=10$，求$|NF|$；

（2）设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq m\pm r,y_0\neq\pm m)$为圆 C_2：$(x-m)^2+y^2=r^2$ 外一点，过 P 作 C_2 的两条切线，分别与 C_1 相交于点 A，B 和 C，D，证明：当 P 在定直线 $x=t$ 上运动时，A，B，C，D 四点的纵坐标乘积为定值的充要条件为 $m^2=t^2+r^2(r\neq0)$．

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．

22．［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=1+3\cos\alpha,\\y=-2+3\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），直线 C_2 的方程为 $y=\sqrt{3}x$，以 O 为极点，以 x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系．

（1）求曲线 C_1 和直线 C_2 的极坐标方程；

（2）若直线 C_2 与曲线 C_1 交于 M，N 两点，求$|OM|\cdot|ON|$的值．

23．［选修 4－5：不等式选讲］（10 分）

已知函数 $f(x)=|x+2|-|x-1|$．

（1）求不等式 $f(x)>|x-1|-3$ 的解集；

（2）若存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $f(x)\geqslant|1-m|$成立，求 m 的取值范围．

考号____________

姓名____________

班级____________

学校____________

密封线内不要答题

2024 届高三考试
数学试题(文科)

考生注意:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|-x-3\leqslant 0\}$,$B=\{x|x-2<0\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{x|-3<x\leqslant 2\}$　B. $\{x|-3\leqslant x<2\}$　C. $\{x|x\geqslant 3\}$　D. $\{x|x<2\}$

2. 已知复数 $z=2-\mathrm{i}$,则 $|1-\mathrm{i}\cdot z|=$

A. $2\sqrt{2}$　B. $\sqrt{5}$　C. 2　D. 1

3. 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{3\pi}{10})$,则下列说法正确的是

A. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{10}$ 对称

B. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{4},0)$ 对称

C. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

D. 若将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍,纵坐标不变,可得函数 $y=\sin(x+\frac{3\pi}{10})$ 的图象

4. 已知△ABC 的每条边长均为 2,D,E 分别是 BC,AC 的中点,则 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　B. $\frac{3}{4}$　C. $\frac{3}{2}$　D. 3

5. 已知函数 $f(x)=4x(x-1)+ax+|x|$ 是偶函数,则 $a=$

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

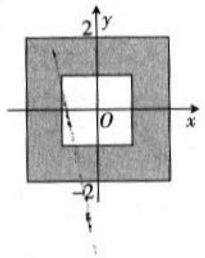
6. 曲线 $y=\frac{x}{x-3}$ 在点 $(2,-2)$ 处的切线方程为

A. $y=-3x+4$　B. $y=x-4$　C. $y=3x-8$　D. $y=3x-4$

7. 设双曲线 $C_1:x^2-y^2=1$,$C_2:\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的离心率分别为 e_1,e_2,若 $e_2=\frac{3}{4}e_1$,则 $b=$

A. 1　B. 2　C. $\sqrt{2}$　D. $\sqrt{3}$

8. 已知两个共中心 O 的正方形的边长分别为 2 和 4,在如图所示的阴影中随机取一点 M,则直线 OM 的倾斜角不大于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为



A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{4}$　C. $\frac{1}{6}$　D. $\frac{1}{8}$

9. △ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $b\cos C-c\cos B=a$,且 $A=2C$,则 $C=$

A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{4}$　C. $\frac{\pi}{8}$　D. $\frac{\pi}{3}$

10. 已知某圆柱的轴截面是边长为 2 的正方形 $ABCD$,在该圆柱的底面内任取一点 E,则当四棱锥 $E-ABCD$ 的体积最大时,该四棱锥的侧面积为

A. $1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$　B. $1+2\sqrt{2}+\sqrt{5}$

C. $1+\sqrt{2}+2\sqrt{5}$　D. $\sqrt{2}+2\sqrt{5}$

11. 第 19 届亚运会将于 2023 年 9 月 23 日至 10 月 8 日在杭州举行,某网络直播平台调研"大学生是否喜欢观看体育比赛直播与性别有关",从某高校男、女生中各随机抽取 100 人进行问卷调查,得到如下数据($5\leqslant m\leqslant 15$,$m\in\mathbf{N}$).

	喜欢观看	不喜欢观看
男生	$80-m$	$20+m$
女生	$50+m$	$50-m$

通过计算,有 95%以上的把握认为大学生喜欢观看直播体育比赛与性别有关,则在被调查的 100 名女生中喜欢观看体育比赛直播的人数的最大值为

附:$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.010	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	6.635	10.828

A. 55　B. 57　C. 58　D. 60

12. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的两条弦 AB,CD 相交于点 P(点 P 在第一象限),且 $AB\perp x$ 轴,$CD\perp y$ 轴. 若 $|PA|:|PB|:|PC|:|PD|=1:3:2:4$,则 $b=$

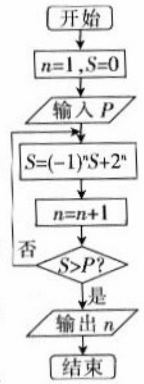
A. 2　B. $\sqrt{2}$　C. $\sqrt{5}$　D. $\sqrt{3}$

第Ⅱ卷

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant -1,\\ \frac{x}{3}-y\leqslant 1,\\ x+y\leqslant -1,\end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最小值为____▲____.

14. 执行如图所示的程序框图,若输出的 $n=5$,则输入的正整数 P 的最小值为____▲____,最大值为____▲____.(本题第一空 3 分,第二空 2 分)



15. 黄金比又称黄金律,是指事物各部分间一定的数学比例关系,即将整体一分为二,较小部分与较大部分之比等于较大部分与整体之比,其比值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$,上述比例又被称为黄金分割. 将底和腰之比等于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的等腰三角形称为黄金三角形,若某黄金三角形的一个底角为 C,则 $\cos 2C=$____▲____.

16. 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内接于半径为 2 的球,若直线 AC_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角为 30°,则 $AB=$____▲____.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.（12 分）

设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 $2a_5-a_4=11$，$S_3=9$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=\dfrac{1+a_n}{(n+1)S_n}$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，若$\dfrac{99}{50}<T_m<\dfrac{101}{51}$，求 m 的值.

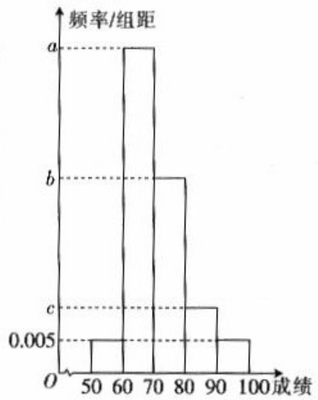
18.（12 分）

某校组织了 600 名高中学生参加中国共青团相关的知识竞赛，将竞赛成绩分成$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$五组，得到如图所示的频率分布直方图. 若图中未知的数据 a,b,c 成等差数列，成绩落在区间$[60,70)$内的人数为 300.

(1)求出频率分布直方图中 a,b,c 的值；

(2)估计该校学生分数的中位数和平均数（同一组中的数据用该组区间的中点值代替）；

(3)现采用分层抽样的方法从分数落在$[80,90)$，$[90,100]$内的两组学生中抽取 6 人，再从这 6 人中随机抽取 2 人进行现场知识答辩，求抽取的这 2 人中恰有 1 人的得分在区间$[90,100]$内的概率.

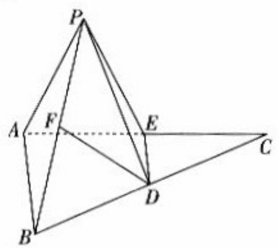


19.（12 分）

将$\triangle ABC$沿它的中位线 DE 折起，使顶点 C 到达点 P 的位置，使得 $PA=PE$，得到如图所示的四棱锥 $P-ABDE$，且 $AC=\sqrt{2}AB=2$，$AC\perp AB$，F 为 PB 的中点.

(1)证明：DF//平面 PAE.

(2)求四棱锥 $P-ABDE$ 的体积.



20.（12 分）

设抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$的焦点为 F，过 F 且斜率为 1 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，$|AB|=16$.

(1)求 p 的值；

(2)求过点 A,B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

21.（12 分）

设函数 $f(x)=a^x+(1-a)x-1(a>0$ 且 $a\neq1)$.

(1)当 $a=\mathrm{e}$ 时，求 $f(x)$的单调区间；

(2)设 $a>1$，证明：当 $x\in(0,1)$时，$f(x)<0$.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.[选修 4－4：坐标系与参数方程]（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=1+3\cos\alpha,\\y=-2+3\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），直线 C_2 的方程为 $y=\sqrt{3}x$，以 O 为极点，以 x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求曲线 C_1 和直线 C_2 的极坐标方程；

(2)若直线 C_2 与曲线 C_1 交于 M,N 两点，求$|OM|\cdot|ON|$的值.

23.[选修 4－5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|x+2|-|x-1|$.

(1)求不等式 $f(x)>|x-1|-3$ 的解集；

(2)若存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $f(x)\geqslant|1-m|$成立，求 m 的取值范围.