2024 届高三考试
数学试题参考答案(文科)

1. B　因为 $A=\{x|x\geqslant-3\}$，$B=\{x|x<2\}$，所以 $A\cap B=\{x|-3\leqslant x<2\}$.

2. C　因为 $1-\mathrm{i}\cdot z=1-\mathrm{i}(2-\mathrm{i})=-2\mathrm{i}$，所以 $|1-\mathrm{i}\cdot z|=2$.

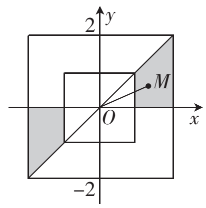
3. D　因为 $f(x)=\sin(2x+\frac{3\pi}{10})$，所以 $f(\frac{3\pi}{10})=\sin(2\times\frac{3\pi}{10}+\frac{3\pi}{10})\neq\pm1$，$f(\frac{\pi}{4})=\sin(2\times\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{10})\neq0$，A 错误，B 错误. 显然 $f(x)$ 的最小正周期为 π，C 错误. 将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，可得函数 $y=\sin(x+\frac{3\pi}{10})$ 的图象，D 正确.

4. C　因为 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，所以 $DE /\!/ AB$，$DE=\frac{1}{2}AB=1$，$\angle ADE=\angle BAD=\frac{\pi}{6}$. 又 $AD=\sqrt{3}$，所以 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}=\sqrt{3}\times1\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$.

5. D　因为 $f(x)=4x^2+(a-4)x+|x|$ 是偶函数，所以 $a-4=0$，解得 $a=4$.

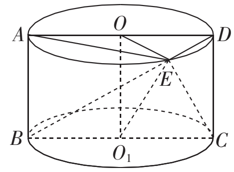
6. A　因为 $y'=-\frac{3}{(x-3)^2}$，所以所求切线的斜率 $k=-\frac{3}{(2-3)^2}=-3$，故该切线的方程为 $y=-3x+4$.

7. A　因为 $e_2=\frac{3}{4}e_1$，所以 $\sqrt{1+\frac{b^2}{8}}=\frac{3}{4}\times\sqrt{1+1}$，解得 $b=1$.



8. B　满足"直线 OM 的倾斜角不大于 $\frac{\pi}{4}$"这个条件的点 M 构成的区域为图中的阴影部分，根据几何概型的定义，可知所求概率为 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

9. A　因为 $b\cos C-c\cos B=a$，所以 $\sin B\cos C-\cos B\sin C=\sin A$，整理得 $\sin B\cos C-\cos B\sin C=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，所以 $\cos B\sin C=0$. 因为 $\sin C>0$，所以 $\cos B=0$. 又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{2}$，从而 $A+C=\frac{\pi}{2}$. 又 $A=2C$，所以 $C=\frac{\pi}{6}$.

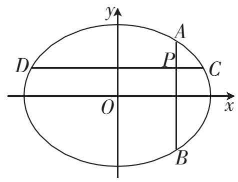


10. B　四棱锥体积 $V_{E-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot d$，其中 d 为 E 到 AD 的距离，因为正方形 $ABCD$ 的面积为定值，所以当 E 为 $\overset{\frown}{AD}$ 的中点时，四棱锥的体积最大，连接 OE，O_1E，此时其侧面积 $S=\frac{1}{2}AD\cdot OE+\frac{1}{2}AB\cdot AE+\frac{1}{2}CD\cdot DE+\frac{1}{2}BC\cdot O_1E=1+2\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

11. C　因为 $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200[(80-m)(50-m)-(20+m)(50+m)]^2}{100\times100\times130\times70}=\frac{8(15-m)^2}{91}\geqslant3.841$，所以 $(15-m)^2\geqslant43.7$，又 $5\leqslant m\leqslant15$，所以 $15-m\geqslant7$，解得 $m\leqslant8$，

故在被调查的100名女生中喜欢观看体育比赛直播的人数的最大值为58.

12. D　设 $P(m,n)$，$|PA|=t$，则 $A(m,n+t)$，$B(m,n-3t)$，$C(m+2t,n)$，$D(m-4t,n)$. 由题知 A,B 关于 x 轴对称，C,D 关于 y 轴对称，所以 $n+t+n-3t=0$，$m+2t+m-4t=0$，即 $n=t$，$m=t$，所以 $A(t,2t)$，$C(3t,t)$.



因为 A,C 在椭圆 E 上，所以$\begin{cases}\dfrac{t^2}{8}+\dfrac{4t^2}{b^2}=1,\\ \dfrac{9t^2}{8}+\dfrac{t^2}{b^2}=1,\end{cases}$即$\dfrac{9}{8}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{8}+\dfrac{4}{b^2}$，解得 $b=\sqrt{3}$.

13. -4　画出可行域(图略)知，当直线 $z=2x-y$ 过点$(-3,-2)$时，z 取得最小值-4.

14. 6;17　执行程序框图，

$n=1$，$S=0$，$S=-S+2^1=2$，$n=2$，满足 $2\leqslant P$；

$S=(-1)^2S+2^2=6$，$n=3$，满足 $6\leqslant P$；

$S=(-1)^3S+2^3=2$，$n=4$，满足 $2\leqslant P$；

$S=(-1)^4S+2^4=18$，$n=5$，满足 $18>P$.

所以 $6\leqslant P\leqslant 17$，$P\in\mathbf{N}^*$，所以正整数 P 的最小值和最大值分别为6和17.

15. $-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$　设这个黄金三角形的另一个底角为 B，顶角为 A，因为$\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以 $\cos C=\dfrac{BC}{2AC}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，则 $\cos 2C=2\cos^2C-1=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

16. $\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$　取 BC 的中点 D，连接 AD，C_1D(图略)，易知$\angle AC_1D$ 为直线 AC_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角. 设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r，边长为 a，正三棱柱的高为 h，则 $AD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$AC_1=\sqrt{a^2+h^2}$，所以 $\sin 30°=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sqrt{a^2+h^2}}$，即 $h^2=2a^2$. 又因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内接于半径为2的球，所以$(\dfrac{\sqrt{3}a}{3})^2+(\dfrac{h}{2})^2=2^2$，所以$\dfrac{a^2}{3}+\dfrac{a^2}{2}=4$，解得 $a=\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$，即 $AB=\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$.

17. 解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

依题意得$\begin{cases}2(a_1+4d)-(a_1+3d)=11,\\ 3(a_1+d)=9,\end{cases}$ ………………………………………………… 3分

解得$\begin{cases}a_1=1,\\ d=2,\end{cases}$ ……………………………………………………………………………… 4分

所以 $a_n=2n-1$. ……………………………………………………………………………… 5分

(2)由(1)得 $S_n=\dfrac{(1+2n-1)n}{2}=n^2$， …………………………………………………… 6分

所以 $b_n=\dfrac{1+a_n}{(n+1)S_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$， ………………………………………… 8分

所以 $T_n=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}$. ………………………………………… 9 分

由$\frac{99}{50}<\frac{2m}{m+1}<\frac{101}{51}$,解得 $99<m<101$, ……………………………………………… 11 分

因为 $m\in\mathbf{N}^*$,所以 $m=100$. ……………………………………………………………… 12 分

18. 解:(1)由已知可得 $a=\frac{300}{600}\times\frac{1}{10}=0.05$, ……………………………………………… 1 分

则$(0.005+0.05+b+c+0.005)\times10=1$,即 $b+c=0.04$,

又因为 a,b,c 成等差数列,所以 $2b=0.05+c$, ………………………………………………… 3 分

解得 $b=0.03,c=0.01$. ……………………………………………………………………… 4 分

(2)可知 $0.005\times10=0.05<0.5,(0.005+0.05)\times10=0.55>0.5$,

设中位数为 x,则 $x\in[60,70)$,由 $0.005\times10+(x-60)\times0.05=0.5$,解得 $x=69$,

即中位数为 69,……………………………………………………………………………………… 6 分

平均数为$(55\times0.005+65\times0.05+75\times0.03+85\times0.01+95\times0.005)\times10=71$. …… 8 分

(3)成绩位于区间[80,90)内的学生有 $0.01\times10\times600=60$ 人,成绩位于区间[90,100]内的学生有 $0.005\times10\times600=30$ 人, ……………………………………………………… 9 分

通过分层抽样抽取的 6 人中成绩位于[80,90)的人数为 $6\times\frac{60}{90}=4$,这 4 人分别记为 a,b,c,d,成绩位于[90,100]的人数为 $6\times\frac{30}{90}=2$,这 2 人分别记为 E,F. ……………………… 10 分

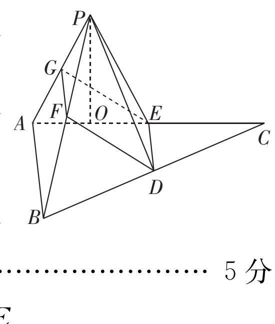
从上述 6 人中抽取 2 人的基本事件有 $ab,ac,ad,aE,aF,bc,bd,bE,bF,cd,cE,cF,dE,dF,EF$,共 15 种, ………………………………………………………………………………… 11 分

其中恰有 1 人的得分在区间[90,100]内的基本事件有 aE,aF,bE,bF,cE,cF,dE,dF,共 8 种,故所求概率 $P=\frac{8}{15}$. ………………………………………………………………… 12 分

19. (1)证明:取 PA 的中点 G,连接 FG,GE,

因为 DE 为$\triangle ABC$ 的中位线,

所以 $DE/\!/AB$,且 $DE=\frac{1}{2}AB$. ……………………………………… 1 分



同理可证 $FG/\!/AB$,且 $FG=\frac{1}{2}AB$. ……………………………………… 2 分

所以 $DE/\!/FG,DE=FG$,四边形 $DEGF$ 为平行四边形,

所以 $DF/\!/EG$. ……………………………………………………… 4 分

因为 $EG\subset$平面 PAE,$DF\not\subset$平面 PAE,所以 $DF/\!/$平面 PAE. ……………………… 5 分

(2)解:取 AE 的中点 O,连接 PO,因为 $PA=PE=AE$,所以 $PO\perp AE$.

易知 $DE\perp EC,DE\perp PE$,所以 $DE\perp$平面 PAE,从而 $DE\perp PO$.

因为 $AE\cap DE=E$,所以 $PO\perp$平面 $ABDE$,且 $PO=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………………… 7 分

因为 $AC=\sqrt{2}AB=2$,所以 $AB=\sqrt{2}$, ………………………………………………………………… 8 分

又因为 DE 为$\triangle ABC$ 的中位线,所以 $DE=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$AE=1$, ……………………………………… 9 分

因为 $AC\perp AB$,所以四边形 $ABDE$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2})\times1=\frac{3\sqrt{2}}{4}$. …………… 11 分

所以四棱锥 $P-ABDE$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{8}$. …………………………… 12 分

20. 解:(1)由题意知 $F(0,\frac{p}{2})$,直线 l 的方程为 $y=x+\frac{p}{2}$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,……… 1 分

联立方程组$\begin{cases}y=x+\frac{p}{2},\\x^2=2py,\end{cases}$消去 x 得 $y^2-3py+\frac{p^2}{4}=0$,则 $y_1+y_2=3p$. ………………… 3 分

因为$|AB|=y_1+y_2+p=4p$,所以 $4p=16$,解得 $p=4$. ………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 l:$y=x+2$,$y_1+y_2=12$,设线段 AB 的中点为 D,则 $D(4,6)$,线段 AB 的中垂线方程为 $y=-x+10$. ……………………………………………………………………………… 7 分

设圆心为 $P(x_0,y_0)$,易点知 $P(x_0,y_0)$在直线 $y=-x+10$ 上,

即$\begin{cases}y_0=-x_0+10,\\(y_0+2)^2=(x_0-4)^2+(y_0-6)^2+8^2,\end{cases}$ ……………………………………………… 9 分

消去 y_0 得 $x_0^2+8x_0-48=0$,解得$\begin{cases}x_0=4,\\y_0=6\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=-12,\\y_0=22,\end{cases}$ ……………………………… 11 分

所以所求圆的方程为$(x-4)^2+(y-6)^2=64$ 或$(x+12)^2+(y-22)^2=576$. ………… 12 分

注:少写一个圆的方程扣 2 分.

21. (1)解:当 $a=\mathrm{e}$ 时,因为 $f(x)=\mathrm{e}^x+(1-\mathrm{e})x-1$,所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x+1-\mathrm{e}$, …………… 1 分

令 $f'(x)=0$,得 $x=\ln(\mathrm{e}-1)$, ……………………………………………………………… 2 分

所以 $f(x)$在$(-\infty,\ln(\mathrm{e}-1))$上单调递减,在$(\ln(\mathrm{e}-1),+\infty)$上单调递增. ………… 4 分

(2)证明:(法一)易知当 $x\in(1,+\infty)$时,$\ln x<x-1$,$\ln\frac{1}{x}<\frac{1}{x}-1$,所以 $1<\frac{x-1}{\ln x}<x$. …
……………………………………………………………………………………………………… 6 分

由题设知 $a>1$,$f'(x)=a^x\ln a+1-a$. ………………………………………………………… 7 分

令 $f'(x)=0$,得 $x_0=\frac{\ln\frac{a-1}{\ln a}}{\ln a}$, ………………………………………………………………… 8 分

由上可知 $1<\frac{a-1}{\ln a}<a$,$0<\ln\frac{a-1}{\ln a}<\ln a$,故 $0<x_0<1$. ……………………………… 10 分

当 $x<x_0$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,当 $x>x_0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增. …… 11 分

又 $f(0)=f(1)=0$,所以当 $0<x<1$ 时,$f(x)<0$. ………………………………………… 12 分

(法二)因为 $f'(x)=a^x\ln a+1-a$,且 $a>1$,所以 $f'(x)$在$(0,1)$上单调递增. ………… 5 分

又 $f'(0)=\ln a+1-a$,设 $g(a)=\ln a+1-a$,则 $g'(a)=\frac{1}{a}-1<0$,可知 $g(a)$在$(1,+\infty)$上

单调递减，所以 $g(a)<g(1)=0$，即 $f'(0)<0$. …………………………………………………… 7 分

又 $f'(1)=a\ln a+1-a$，设 $h(a)=a\ln a+1-a$，则 $h'(a)=\ln a>0$，可知 $h(a)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以 $h(a)>h(1)=0$，即 $f'(1)>0$. …………………………………………………… 9 分

所以存在唯一的 $x_0\in(0,1)$，使得 $f'(x_0)=0$，且 $f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,1)$上单调递增. …………………………………………………………………………………… 11 分

因为 $f(0)=f(1)=0$，所以当 $x\in(0,1)$时，$f(x)<0$. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1)曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=1+3\cos\alpha,\\ y=-2+3\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），其普通方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=9$，即 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$， …………………………………………………… 2 分

则 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta-4=0$. …………………………………… 3 分

直线 C_2 的方程为 $y=\sqrt{3}x$，

所以直线 C_2 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$. ………………………………………………… 5 分

(2)设 $M(\rho_1,\theta)$，$N(\rho_2,\theta)$，

将 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$代入 $\rho^2-2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta-4=0$， ………………………………… 7 分

得 $\rho^2+(2\sqrt{3}-1)\rho-4=0$， ……………………………………………………………… 8 分

所以 $\rho_1\rho_2=-4$， ……………………………………………………………………………… 9 分

所以$|OM|\cdot|ON|=|\rho_1\rho_2|=4$. ………………………………………………………………… 10 分

23. 解：(1)化简得$|x+2|-2|x-1|>-3$. ……………………………………………………………… 1 分

当 $x\geqslant1$ 时，解得 $x<7$，所以 $1\leqslant x<7$； ………………………………………………… 2 分

当 $x\leqslant-2$ 时，解得 $x>1$，此时无解； ………………………………………………………… 3 分

当$-2<x<1$ 时，解得 $x>-1$，所以$-1<x<1$. ……………………………………………… 4 分

综上所述，原不等式的解集为$(-1,7)$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $f(x)=\begin{cases}-3,x\leqslant-2,\\ 2x+1,-2<x<1,\\ 3,x\geqslant1,\end{cases}$ ……………………………………………………………… 7 分

所以 $f(x)_{\max}=3$. ………………………………………………………………………………… 8 分

由题意知$|1-m|\leqslant3$，解得$-2\leqslant m\leqslant4$，

所以 m 的取值范围是$[-2,4]$. …………………………………………………………………… 10 分