2022 届高三考试
数学试题参考答案(文科)

1. D **【解析】本题考查集合的交集,考查运算求解能力.**

因为 $B=\{x|x>-1\}$,所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$.

2. B **【解析】本题考查三角函数的定义,考查数学抽象的核心素养.**

由已知得 $r=|OP|=1$,所以 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

3. A **【解析】本题考查逻辑用语,考查逻辑推理的核心素养.**

p:当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时,$2\sin x+\cos x=2>\sqrt{3}$,故命题 p 为假命题;q:若 $a>b>0$,则 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,又 $c<0$,所以 $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$,故命题 q 为真命题. 故 $p\vee q$,$(\neg p)\wedge q$ 为真命题,$(\neg p)\wedge(\neg q)$,$p\wedge(\neg q)$ 为假命题,故选 A.

4. A **【解析】本题考查充分必要条件,考查逻辑推理的核心素养.**

若函数 $f(x)=\sin(2x+\theta)$ 为偶函数,则 $\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi$,所以"$\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$"是"函数 $f(x)=\sin(2x+\theta)$ 为偶函数"的充分不必要条件.

5. A **【解析】本题考查平面向量的数量积公式,考查运算求解能力.**

因为 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$,所以 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{b}=(2\lambda,\lambda)$,又 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=4\lambda-2\lambda=2\lambda=4$,所以 $\lambda=2$,$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

6. C **【解析】本题考查对数的运算,考查运算求解能力.**

由已知可得 $2\log_2 x=\log_2(2x+3)$,则 $\begin{cases}x^2=2x+3,\\x>0,\\2x+3>0,\end{cases}$ 解得 $x=3$.

7. B **【解析】本题考查函数的图象,考查数形结合的数学思想.**

函数的定义域为 $\mathbf{R}$,因为 $f(-x)=\frac{\sin(-x)+x}{(-x)^2+1}=-f(x)$,所以函数 $f(x)$ 为奇函数,其图象关于原点对称,所以排除 C,D. 因为当 $x>0$ 时,$\sin x<x$,即 $f(x)<0$,所以排除 A. 故选 B.

8. C **【解析】本题考查三角函数的图象,考查化归与转化的数学思想.**

由已知可得 $f(x)=\cos 2(x-\frac{\pi}{8})=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$,则 $f(x)$ 的最小正周期为 π. 令 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,令 $k=-1$,即 $x=-\frac{\pi}{8}$,所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{8},0)$ 对称. 令 $2x-\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,令 $k=1$,即 $x=\frac{5\pi}{8}$,所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{8}$ 对称. 由 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$,则 $2x-\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$,$f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上并不是单调递增的. 故选 C.

9. C **【解析】本题考查函数的零点,考查数形结合的数学思想.**

$f(x)=\ln x+x^2-2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,$f(1)<0$,$f(2)>0$,故 $a\in(1,2)$. 又因为 $g(x)=e^{x-1}+x-5$ 在 $(1,2)$ 上单调递增,且 $g(2)=e+2-5<0$,故 $e^{a-1}+a-5<0$.

10. B **【解析】本题考查不等式恒成立,考查逻辑推理的核心素养.**

若不等式 $ax>\ln x$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立,则 $a>\frac{\ln x}{x}$,令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>1)$,则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,所以 $f(x)$

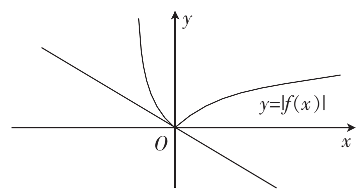
在$(1,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，所以$a>\frac{1}{e}$. 所以a的取值范围是为$(\frac{1}{e},+\infty)$.

11. D **【解析】本题考查平面向量的数量积，考查运算求解能力.**

易知每个三角形的顶角为$\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$，$\overrightarrow{AB}$的模为2，根据正八边形的特征，可以得到$\overrightarrow{AP}$在$\overrightarrow{AB}$方向上的投影的取值范围是$(-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$，结合向量数量积的定义式，可知$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$等于$\overrightarrow{AB}$的模与$\overrightarrow{AP}$在$\overrightarrow{AB}$方向上的投影的乘积，所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$的取值范围是$(-2\sqrt{2},4+2\sqrt{2})$.

12. A **【解析】本题考查函数与不等式的关系，考查直观想象的核心素养.**

函数$f(x)=\begin{cases}\ln(x+1),x>0,\\ \tan x,-\frac{\pi}{2}<x\leqslant 0,\end{cases}$则$|f(x)|=\begin{cases}\ln(x+1),x>0,\\ -\tan x,-\frac{\pi}{2}<x\leqslant 0,\end{cases}$画出函数$y=|f(x)|$的图象，如图所示，当$x\leqslant 0$时，$y=|f(x)|=-\tan x$，所以$y'=-\frac{1}{\cos^2 x}$，令$x=0$，则$y'=-1$，所以$a$的取值范围为$[-1,0]$.



13. $\frac{7}{8}$ **【解析】本题主要考查二倍角公式，两角和的余弦公式，考查运算求解能力.**

因为$\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{4}$，所以$\sin\alpha=-\frac{1}{4}$，则$\cos 2\alpha=1-2\times(-\frac{1}{4})^2=\frac{7}{8}$.

14. $x+y=0$ **【解析】本题考查导数的几何意义，考查运算求解能力.**

由题可知点$(-1,1)$在曲线$y=\frac{3x+1}{x-1}$上，又$y'=\frac{3(x-1)-(3x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-4}{(x-1)^2}$，所以$y'|_{x=-1}=-1$. 故切线方程为$y-1=-(x+1)$，即$x+y=0$.

15. $\frac{3}{5}$ **【解析】本题考查解三角形，考查运算求解能力.**

因为$a\cos B-b\cos A=\frac{5}{3}c$，所以$\sin A\cos B-\sin B\cos A=\frac{5}{3}\sin C=\frac{5}{3}(\sin A\cos B+\sin B\cos A)$，则$\sin A\cos B=-4\sin B\cos A$，即$\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\cos B}{\sin B}=-4$，故$\frac{\tan A}{\tan B}=-4$. 又$\tan A=-1$，所以$\tan B=\frac{1}{4}$，$\tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{3}{5}$.

16. $-\frac{1}{2}$ **【解析】本题考查函数的性质，考查逻辑推理的核心素养.**

由题可知$f(4+x)=-f(-x)=f(x)$，所以$f(x)$的周期为4，又$f(-1)=\frac{1}{2}$，$f(0)=0$，$f(1)=-\frac{1}{2}$，$f(2)=0$，$f(3)=\frac{1}{2}$，$f(4)=0$，所以$f(1)+f(2)+\cdots+f(2022)=505\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)=-\frac{1}{2}$.

17. 解：(1)根据题中所给数据，得男生射击环数的平均数为$\bar{x}_{男}=\frac{1}{10}(8+9+7+9+7+6+10+10+8+6)=8$；

………………………………………………………………………… 1分

女生射击环数的平均数为$\bar{x}_{女}=\frac{1}{10}(10+9+8+6+8+7+9+7+8+8)=8$. ………………………… 2分

男生射击环数的方差为$s^2_{男}=\frac{1}{10}[(8-8)^2+(9-8)^2+\cdots+(6-8)^2]=2$；………………………… 4分

女生射击环数的方差为$s^2_{女}=\frac{1}{10}[(10-8)^2+(9-8)^2+\cdots+(8-8)^2]=\frac{6}{5}$.

故男生射击环数的平均数为 8,方差为 2,女生射击环数的平均数为 8,方差为$\frac{6}{5}$. ························ 6 分

(2)2×2 列联表如下：

	男生	女生	总计
成绩优异	4	3	7
成绩不优异	6	7	13
总计	10	10	20

·· 8 分

所以 $K^2=\frac{20\times(4\times7-3\times6)^2}{7\times13\times10\times10}\approx0.2198<2.706$, ························ 10 分

所以没有 90%的把握认为“成绩优异”与性别有关. ························ 12 分

18. 解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,

令 $n=1$,则 $a_2=a_1+1$,即 $d=1$. ························ 2 分

又 $S_{11}=11a_1+\frac{11\times10}{2}\times1=77$,解得 $a_1=2$, ························ 4 分

所以 $a_n=2+(n-1)=n+1$. ························ 6 分

(2)由(1)得 $b_n=\lg\frac{n+1}{n}$,则 $T_n=\lg(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n})=\lg(n+1)$. ························ 9 分

又 $T_m>2$,所以 $\lg(m+1)>2$,解得 $m>99$,故整数 m 的最小值为 100. ························ 12 分

19. (1)证明:连接 AC_1,设 $A_1C\cap AC_1=O$,连接 OD.

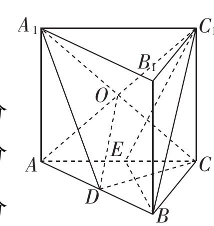
由正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$,得 $AO=OC_1$.

又因为在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AD=DB$,所以 $OD/\!/BC_1$. ························ 3 分

又因为 $BC_1\not\subset$平面 A_1CD,$OD\subset$平面 A_1CD,

所以 $BC_1/\!/$平面 A_1CD. ························ 5 分

(2)解:取 E 为 AC 的中点,连接 BE,EC_1,所以 $BE\perp AC$.



因为 $CC_1\perp$平面 ABC,所以 $CC_1\perp BE$.

又 $CC_1\cap AC=C$,所以 $BE\perp$平面 ACC_1A_1,则 $BE\perp A_1C$. ························ 6 分

因为 $A_1C\perp BC_1$,$BE\cap BC_1=B$,所以 $A_1C\perp$平面 BEC_1,所以 $A_1C\perp EC_1$, ········ 7 分

从而$\triangle ECC_1\backsim\triangle CC_1A_1$,所以$\frac{CC_1}{EC}=\frac{C_1A_1}{CC_1}$,解得 $CC_1=\sqrt{2}$. ························ 9 分

所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为$\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\times\sqrt{2}=\sqrt{6}$. ························ 10 分

三棱锥 A_1-ADC 的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$, ························ 11 分

则多面体 $BCDA_1B_1C_1$ 的体积为$\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$. ························ 12 分

20. (1)解:$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}-\ln x-a}{e^x}$,$x\in(0,+\infty)$. ························ 1 分

因为 $f(x)$在 $x=1$ 处取到极值,所以 $f'(1)=1-a=0$, ························ 3 分

解得 $a=1$. ························ 4 分

(2)证明:由(1)可知 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}-\ln x-1}{e^x}$,令 $g(x)=\frac{1}{x}-\ln x-1$,则 $g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}<0$, ········ 6 分

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $g(1)=0$. ………………………………………………………………… 8 分

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. ……………………… 10 分

所以 $f(x)\leqslant f(1)=\frac{1}{e}$，即 $f(x)\leqslant\frac{1}{e}$ 成立. ………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)依题意得 $\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2b^2}=1,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 则 $a^2=2,b^2=1$. ………………………………………………………… 3 分

所以椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)易知 $F_1(-1,0)$，设 M 为 AB 的中点，

当直线 AB 与 x 轴垂直时，若 $|CA|=|CB|$，则 $C(-2,0)$，又因为 $|CM|\neq\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$，

所以 $\triangle ABC$ 不是正三角形. ……………………………………………………………………………… 5 分

当直线 AB 与 x 轴不垂直时，不妨设 AB：$y=k(x+1)(k\neq0)$，

将 $y=k(x+1)$ 代入 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，整理得 $(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由韦达定理得 $x_1+x_2=\frac{-4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$， ………………………… 6 分

则 $x_M=\frac{-2k^2}{1+2k^2}$，$y_M=k(x_M+1)=\frac{k}{1+2k^2}$， ……………………………………………………… 7 分

故 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{(1+k^2)[\frac{16k^4}{(1+2k^2)^2}-\frac{8k^2-8}{1+2k^2}]}=2\sqrt{2}\cdot\frac{1+k^2}{1+2k^2}$. ……………………………………………… 8 分

直线 CM 的方程为 $y-\frac{k}{1+2k^2}=-\frac{1}{k}(x-\frac{-2k^2}{1+2k^2})$，将 $x=-2$ 代入可得 $C(-2,\frac{\frac{2}{k}+3k}{1+2k^2})$， ………… 9 分

点 C 到直线 l 的距离为 $\frac{|k+\frac{\frac{2}{k}+3k}{1+2k^2}|}{\sqrt{1+k^2}}$， ……………………………………………………………… 10 分

所以 $\frac{|k+\frac{\frac{2}{k}+3k}{1+2k^2}|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{1+k^2}{1+2k^2}$，解得 $k^2=2$，即 $k=\pm\sqrt{2}$， ……………………… 11 分

此时 C 的坐标为 $(-2,\pm\frac{4\sqrt{2}}{5})$. ………………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，得 $(3+\sin^2\theta)\rho^2=12$ 可化为 $3x^2+4y^2=12$，

所以 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………………………… 2 分

$\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta+14=0$ 可化为 $x+2y+14=0$，

所以 l 的直角坐标方程为 $x+2y+14=0$. ………………………………………………………………… 4 分

(2)曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数)，设 C 上点的坐标为 $(2\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta)$， ………… 6 分

则 C 上的点到直线 l 的距离 $d=\frac{|2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta+14|}{\sqrt{5}}=\frac{|4\sin(\theta+\frac{\pi}{6})+14|}{\sqrt{5}}$， ………………………… 8 分

当 $\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=-1$ 时，d 取得最小值，且 $d_{\min}=2\sqrt{5}$. ………………………… 10 分

23.(1)解：$f(x)=|x-1|-|x+2|=\begin{cases}3, x<-2,\\ -2x-1, -2\leqslant x<1,\\ -3, x\geqslant 1.\end{cases}$

当 $x<-2$ 时，$3\geqslant 1$ 恒成立；………………………… 1 分

当 $-2\leqslant x<1$ 时，$-2x-1\geqslant 1$，得 $-2\leqslant x\leqslant -1$；………………………… 2 分

当 $x\geqslant 1$ 时，$-3\geqslant 1$ 不成立. ………………………… 3 分

综上，不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集为 $(-\infty,-1]$. ………………………… 4 分

(2)证明：由(1)可知，$f(x)_{\max}=3$，………………………… 6 分

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+2ab+b^2}=1-\frac{2ab}{a^2+2ab+b^2}=1-\frac{2}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}\geqslant 1-\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立. ………………………… 9 分

所以对一切正数 a,b，均有 $\frac{f(x)}{6}\leqslant\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$. ………………………… 10 分