2022 届高三考试
数学试题参考答案(理科)

1. C 【解析】本题考查集合的交集,考查运算求解能力.

因为 $B=\{x|0<x<e\}$,所以 $A\cap B=\{1,2\}$.

2. D 【解析】本题考查三角函数的定义,考查数学抽象的核心素养.

由已知得点 P 的坐标为$(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$,$r=|OP|=1$,所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=-\frac{7}{5}$.

3. A 【解析】本题考查逻辑用语,考查逻辑推理的核心素养.

p:当 $x=\frac{\pi}{2}$时,$2\sin x+\cos x=2>\sqrt{3}$,故命题 p 为假命题;q:若 $a>b>0$,则 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,又 $c<0$,所以$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$,故命题 q 为真命题. 故 $p\vee q$,$(\neg p)\wedge q$ 为真命题,$(\neg p)\wedge(\neg q)$,$p\wedge(\neg q)$为假命题,故选 A.

4. A 【解析】本题考查充分必要条件,考查逻辑推理的核心素养.

若函数 $f(x)=\sin(2x+\theta)$为偶函数,则 $\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi$,所以“$\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$”是“函数 $f(x)=\sin(2x+\theta)$为偶函数”的充分不必要条件.

5. D 【解析】本题考查平面向量的数量积公式,考查运算求解能力.

由$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,所以 $4+m=0$,则 $m=-4$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,-3)$,所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5$.

6. B 【解析】本题考查函数的图象,考查数形结合的数学思想.

函数的定义域为 $\mathbf{R}$,因为 $f(-x)=\frac{\sin(-x)+x}{(-x)^2+1}=-f(x)$,所以函数 $f(x)$为奇函数,其图象关于原点对称,所以排除 C,D. 因为当 $x>0$ 时,$\sin x<x$,即 $f(x)<0$,所以排除 A. 故选 B.

7. C 【解析】本题考查三角函数的图象,考查化归与转化的数学思想.

由已知可得 $f(x)=\cos 2(x-\frac{\pi}{8})=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$,则 $f(x)$的最小正周期为 π. 令 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,令 $k=-1$,即 $x=-\frac{\pi}{8}$,所以 $f(x)$的图象关于点$(-\frac{\pi}{8},0)$对称. 令 $2x-\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,令 $k=1$,即 $x=\frac{5\pi}{8}$,所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{8}$对称. 由 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$,则 $2x-\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$,$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{4}]$上并不是单调递增的. 故选 C.

8. C 【解析】本题考查函数的零点,考查数形结合的数学思想.

$f(x)=\ln x+x^2-2$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,$f(1)<0$,$f(2)>0$,故 $a\in(1,2)$. 又因为 $g(x)=e^{x-1}+x-5$ 在$(1,2)$上单调递增,且 $g(2)=e+2-5<0$,故 $e^{a-1}+a-5<0$.

9. B 【解析】本题考查对数的运算,考查化归与转化的数学思想.

$\log_{ab}c=\log_a c\cdot\log_b c$,可化为 $\log_c ab=\log_c a\cdot\log_c b$,$\log_c a+\log_c b=\log_c a\cdot\log_c b$,$\frac{1}{\log_c b}+\frac{1}{\log_c a}=1$,所以 $\log_a c+\log_b c=1$.

10. B 【解析】本题考查充分必要条件,考查逻辑推理的核心素养.

因为“$x>1$”是“$ax>\ln x$”的充分不必要条件,所以 $x>1$ 是不等式 $ax>\ln x$ 的解集的真子集. 若不等式 $ax>\ln x$ 在$(1,+\infty)$上恒成立,则 $a>\frac{\ln x}{x}$,令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>1)$,则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,所以 $f(x)$在$(1,e)$上单

调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，所以$a>\frac{1}{e}$. 所以a的取值范围是为$(\frac{1}{e},+\infty)$.

11. D **【解析】本题考查平面向量的数量积，考查运算求解能力.**

易知每个三角形的顶角为$\frac{360^\circ}{8}=45^\circ$，$\overrightarrow{AB}$的模为2，根据正八边形的特征，可以得到$\overrightarrow{AP}$在$\overrightarrow{AB}$方向上的投影的取值范围是$(-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$，结合向量数量积的定义式，可知$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$等于$\overrightarrow{AB}$的模与$\overrightarrow{AP}$在$\overrightarrow{AB}$方向上的投影的乘积，所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$的取值范围是$(-2\sqrt{2},4+2\sqrt{2})$.

12. D **【解析】本题考查指数、对数比较大小，考查逻辑推理的核心素养.**

易证当$x>0$时，$e^x>x+1$，所以$e^{\frac{x}{2}}>\sqrt{x+1}$，令$x=0.1$，则$e^{0.05}>\sqrt{1.1}$，所以$a>c$. 易证当$x>0$时，$\ln x\leqslant x-1$(当且仅当$x=1$时取等号)，则$\ln\sqrt{x}+1\leqslant\sqrt{x}$，即$\frac{\ln x}{2}+1\leqslant\sqrt{x}$，令$x=1.1$，则$\frac{\ln 1.1}{2}+1<\sqrt{1.1}$，所以$b<c$. 综上，$a>c>b$.

13. $-\frac{7}{2}$ **【解析】本题主要考查二倍角公式，两角和的余弦公式，考查运算求解能力.**

因为$\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{4}$，所以$\sin\alpha=-\frac{1}{4}$，则$\cos 2\alpha=1-2\times(\frac{1}{4})^2=\frac{7}{8}$，故$\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{7}{8}}{-\frac{1}{4}}=-\frac{7}{2}$.

14. $x+y=0$ **【解析】本题考查导数的几何意义，考查运算求解能力.**

由题可知点$(-1,1)$在曲线$y=\frac{3x+1}{x-1}$上，又$y'=\frac{3(x-1)-(3x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-4}{(x-1)^2}$，所以$y'|_{x=-1}=-1$. 故切线方程为$y-1=-(x+1)$，即$x+y=0$.

15. $-\frac{1}{2}$ **【解析】本题考查函数的性质，考查逻辑推理的核心素养.**

由题可知$f(4+x)=-f(-x)=f(x)$，所以$f(x)$的周期为4，又$f(-1)=\frac{1}{2}$，$f(0)=0$，$f(1)=-\frac{1}{2}$，$f(2)=0$，$f(3)=\frac{1}{2}$，$f(4)=0$，所以$f(1)+f(2)+\cdots+f(2022)=505\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(1)+f(2)=-\frac{1}{2}$.

16. $\frac{3}{4}$ **【解析】本题考查解三角形，考查运算求解能力.**

因为$a\cos B-b\cos A=\frac{5}{3}c$，所以$\sin A\cos B-\sin B\cos A=\frac{5}{3}\sin C=\frac{5}{3}(\sin A\cos B+\sin B\cos A)$，则$\sin A\cos B=-4\sin B\cos A$，即$\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\cos B}{\sin B}=-4$，故$\frac{\tan A}{\tan B}=-4$，则$\tan A=4\tan(A+C)$，$\frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=\frac{\tan A}{4}$，$\tan C=-\frac{3\tan A}{4+\tan^2 A}=-\frac{3}{\tan A+\frac{4}{\tan A}}\leqslant\frac{3}{4}$，当且仅当$\tan A=-2$时取等号.

17. 解：(1)根据题中所给数据，得男生射击环数的平均数为$\bar{x}_{男}=\frac{1}{10}(8+9+7+9+7+6+10+10+8+6)=8$；
…………………………………………………………………………………… 1分

女生射击环数的平均数为$\bar{x}_{女}=\frac{1}{10}(10+9+8+6+8+7+9+7+8+8)=8$. ………………………… 2分

男生射击环数的方差为$s^2_{男}=\frac{1}{10}[(8-8)^2+(9-8)^2+\cdots+(6-8)^2]=2$； ………………………… 4分

女生射击环数的方差为$s^2_{女}=\frac{1}{10}[(10-8)^2+(9-8)^2+\cdots+(8-8)^2]=\frac{6}{5}$.

故男生射击环数的平均数为 8，方差为 2，女生射击环数的平均数为 8，方差为$\frac{6}{5}$. ························ 6 分

(2)2×2 列联表如下：

	男生	女生	总计
成绩优异	4	3	7
成绩不优异	6	7	13
总计	10	10	20

·· 8 分

所以 $K^2=\frac{20\times(4\times7-3\times6)^2}{7\times13\times10\times10}\approx0.2198<2.706$，························ 10 分

所以没有 90％的把握认为“成绩优异”与性别有关. ························ 12 分

18.(1)证明：$\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{\frac{2a_n-1}{a_n}-1}-\frac{1}{a_n-1}=\frac{a_n}{a_n-1}-\frac{1}{a_n-1}=\frac{a_n-1}{a_n-1}=1$，························ 4 分

所以数列$\{\frac{1}{a_n-1}\}$为等差数列. ························ 5 分

(2)解：由(1)知$\frac{1}{a_n-1}=1+(n-1)=n$，所以 $a_n=\frac{1}{n}+1=\frac{n+1}{n}$，························ 7 分

则 $b_n=\lg\frac{n+1}{n}$，故 $S_n=\lg(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n})=\lg(n+1)$. ························ 10 分

又 $S_m>2$，所以 $\lg(m+1)>2$，解得 $m>99$，故整数 m 的最小值为 100. ························ 12 分

19.(1)证明：连接 AC_1，设 $A_1C\cap AC_1=O$，连接 OD.

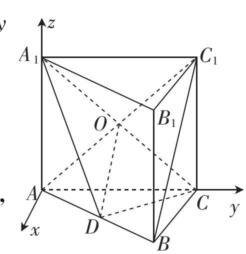
由正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，得 $AO=OC_1$.

又因为在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AD=DB$，所以 $OD\parallel BC_1$，························ 3 分

又因为 $BC_1\not\subset$平面 A_1CD，$OD\subset$平面 A_1CD，

所以 $BC_1\parallel$平面 A_1CD. ························ 5 分

(2)解：以 A 为原点，平面 ABC 内过 A 且垂直 AC 的直线为 x 轴，AC 所在直线为 y 轴，AA_1 所在直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$.



设 $AB=1$，则 $C_1(0,1,\sqrt{3})$，$A(0,0,0)$，$B(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，$C(0,1,0)$.

由空间向量的坐标运算可得$\overrightarrow{BC_1}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，$\overrightarrow{CB}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0)$. ························ 6 分

设平面 CBC_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\end{cases}$代入可得$\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+\frac{1}{2}y_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1-\frac{1}{2}y_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$，则 $y_1=\sqrt{3}$，$z_1=0$，所以 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},0)$. ························ 8 分

设平面 BAC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$代入可得$\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_2+\dfrac{1}{2}y_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}x_2+\dfrac{1}{2}y_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=1$,则 $y_2=-\sqrt{3}$,$z_2=1$,所以 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},1)$. ………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}|=|\dfrac{1-3}{\sqrt{1+3}\times\sqrt{1+3+1}}|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

所以二面角 $A-BC_1-C$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ………… 12 分

20. 解:(1)依题意得$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{2b^2}=1,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 则 $a^2=2,b^2=1$. ………… 3 分

所以椭圆 Γ 的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ………… 4 分

(2)易知 $F_1(-1,0)$,设 M 为 AB 的中点,

当直线 AB 与 x 轴垂直时,若$|CA|=|CB|$,则 $C(-2,0)$,又因为$|CM|\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}|AB|$,

所以$\triangle ABC$ 不是正三角形. ………… 5 分

当直线 AB 与 x 轴不垂直时,不妨设 AB:$y=k(x+1)(k\neq0)$,

将 $y=k(x+1)$代入$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$,整理得$(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由韦达定理得 $x_1+x_2=\dfrac{-4k^2}{1+2k^2}$,$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}$, ………… 6 分

则 $x_M=\dfrac{-2k^2}{1+2k^2}$,$y_M=k(x_M+1)=\dfrac{k}{1+2k^2}$, ………… 7 分

故$|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{(1+k^2)[\dfrac{16k^4}{(1+2k^2)^2}-\dfrac{8k^2-8}{1+2k^2}]}=2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1+k^2}{1+2k^2}$. ………… 8 分

直线 CM 的方程为 $y-\dfrac{k}{1+2k^2}=-\dfrac{1}{k}(x-\dfrac{-2k^2}{1+2k^2})$,将 $x=-2$ 代入可得 $C(-2,\dfrac{\frac{2}{k}+3k}{1+2k^2})$, ………… 9 分

点 C 到直线 l 的距离为$\dfrac{|k+\dfrac{\frac{2}{k}+3k}{1+2k^2}|}{\sqrt{1+k^2}}$, ………… 10 分

所以$\dfrac{|k+\dfrac{\frac{2}{k}+3k}{1+2k^2}|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{2}\times\dfrac{1+k^2}{1+2k^2}$,解得 $k^2=2$,即 $k=\pm\sqrt{2}$, ………… 11 分

此时 C 的坐标为$(-2,\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{5})$. ………… 12 分

21. (1)解:$f'(x)=\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}+x-a$, ………… 1 分

因为 $x=0$ 是函数 $f(x)$的一个极值点,所以 $f'(0)=\dfrac{1}{a}-a=0$, ………… 3 分

解得 $a=\pm1$. ………………………………………………………………………… 4 分

又因为 $a+0>0$,所以 $a=1$. ………………………………………………………… 5 分

(2)证明:由(1)可知 $x\in(-1,+\infty)$,$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}+x-1=\dfrac{xe^x+x+1+(x-1)(x+1)^2}{(x+1)^2}=$

$\dfrac{xe^x+x^2(x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{x(e^x+x^2+x)}{(x+1)^2}$. ………………………………………………… 7 分

令 $g(x)=e^x+x^2+x(x\in(-1,+\infty))$,当 $x\in[0,+\infty)$时,$g(x)\geqslant0$;

当 $x\in(-1,0)$时,$g(x)=e^x+x^2+x>\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{4}>0$,所以 $g(x)>0$. ………………………… 9 分

所以当 $x\in(-1,0)$时,$f'(x)<0$,则 $f(x)$在$(-1,0)$上单调递减;

当 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,则 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. ………………………… 11 分

所以 $f(x)\geqslant f(0)=1$. ……………………………………………………………… 12 分

22. 解:(1)由 $x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$,得$(3+\sin^2\theta)\rho^2=12$ 可化为 $3x^2+4y^2=12$,

所以 C 的直角坐标方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………… 2 分

$\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta+14=0$ 可化为 $x+2y+14=0$,

所以 l 的直角坐标方程为 $x+2y+14=0$. ………………………………………………… 4 分

(2)曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),设 C 上点的坐标为$(2\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta)$, ……………… 6 分

则 C 上的点到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta+14|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|4\sin(\theta+\frac{\pi}{6})+14|}{\sqrt{5}}$, ……………………… 8 分

当 $\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=-1$ 时,d 取得最小值,且 $d_{\min}=2\sqrt{5}$. ………………………………… 10 分

23. (1)解:$f(x)=|x-1|-|x+2|=\begin{cases}3,x<-2,\\ -2x-1,-2\leqslant x<1,\\ -3,x\geqslant1.\end{cases}$

当 $x<-2$ 时,$3\geqslant1$ 恒成立; ……………………………………………………… 1 分

当$-2\leqslant x<1$ 时,$-2x-1\geqslant1$,得$-2\leqslant x\leqslant-1$; ………………………………… 2 分

当 $x\geqslant1$ 时,$-3\geqslant1$ 不成立. ……………………………………………………… 3 分

综上,不等式 $f(x)\geqslant1$ 的解集为$(-\infty,-1]$. ………………………………………… 4 分

(2)证明:由(1)可知,$f(x)_{\max}=3$, ……………………………………………………… 6 分

$\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2+2ab+b^2}=1-\dfrac{2ab}{a^2+2ab+b^2}=1-\dfrac{2}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}\geqslant1-\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$,

当且仅当 $a=b$ 时,等号成立. ………………………………………………………… 9 分

所以对一切正数 a,b,均有$\dfrac{f(x)}{6}\leqslant\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$. …………………………………… 10 分