2024 届高三考试
数学试题参考答案(理科)

1. C　因为$\complement_U B=\{-1,0,2\}$,$A=\{-1,1,2\}$,所以$A\cap(\complement_U B)=\{-1,2\}$.

2. A　$z=\frac{7-\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}=\frac{(7-\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})}{10}=\frac{10+20\mathrm{i}}{10}=1+2\mathrm{i}$.

3. D　因为$f(x)=\sin(2x+\frac{3\pi}{10})$,所以$f(\frac{3\pi}{10})=\sin(2\times\frac{3\pi}{10}+\frac{3\pi}{10})\neq\pm1$,$f(\frac{\pi}{4})=\sin(2\times\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{10})\neq0$,A 错误,B 错误. 显然$f(x)$的最小正周期为$\pi$,C 错误. 将$f(x)$图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍,纵坐标不变,可得函数$y=\sin(x+\frac{3\pi}{10})$的图象,D 正确.

4. C　因为DE是$\triangle ABC$的中位线,所以$DE\parallel AB$,$DE=\frac{1}{2}AB=1$,$\angle ADE=\angle BAD=\frac{\pi}{6}$. 又$AD=\sqrt{3}$,所以$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}=\sqrt{3}\times1\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$.

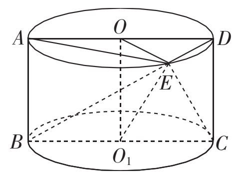
5. A　因为$y'=-\frac{3}{(x-3)^2}$,所以所求切线的斜率$k=-\frac{3}{(2-3)^2}=-3$,故该切线的方程为$y=-3x+4$.

6. B　因为$e_2=\frac{5}{6}e_1$,所以$\sqrt{1-\frac{b^2}{9}}=\frac{5}{6}\times\sqrt{1-\frac{1}{5}}$,解得$b=2$.

7. D　令$u=x(2x-a)$,因为$y=3^u$是增函数,所以$u=x(2x-a)$在区间$(-\infty,1)$上单调递减,所以$\frac{a}{4}\geqslant1$,解得$a\geqslant4$.

8. A　因为$b\cos C-c\cos B=a$,所以$\sin B\cos C-\cos B\sin C=\sin A$,整理得$\sin B\cos C-\cos B\sin C=\sin B\cos C+\cos B\sin C$,所以$\cos B\sin C=0$. 因为$\sin C>0$,所以$\cos B=0$. 又$B\in(0,\pi)$,所以$B=\frac{\pi}{2}$,从而$A+C=\frac{\pi}{2}$. 又$A=2C$,所以$C=\frac{\pi}{6}$.

9. B　四棱锥体积$V_{E-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot d$,其中$d$为$E$到$AD$的距离,因为正方形$ABCD$的面积为定值,所以当$E$为$\overset{\frown}{AD}$的中点时,四棱锥的体积最大,连接$OE$,$O_1E$,此时其侧面积$S=\frac{1}{2}AD\cdot OE+\frac{1}{2}AB\cdot AE+\frac{1}{2}CD\cdot DE+\frac{1}{2}BC\cdot O_1E=1+2\sqrt{2}+\sqrt{5}$.



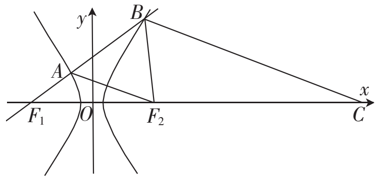
10. C　甲家庭的站法有$A_2^2A_3^2=12$种,乙家庭的站法有$A_3^3A_4^2=72$种,最后将两个家庭的整体全排列,有$A_2^2=2$种站法,则所有不同站法的种数为$12\times72\times2=1728$.

11. C　因为$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200[(80-m)(50-m)-(20+m)(50+m)]^2}{100\times100\times130\times70}$

$=\frac{8(15-m)^2}{91}\geqslant 3.841$，所以$(15-m)^2\geqslant 43.7$，又 $5\leqslant m\leqslant 15$，所以 $15-m\geqslant 7$，解得 $m\leqslant 8$，

故在被调查的 100 名女生中喜欢观看体育比赛直播的人数的最大值为 58.

12. D　因为$\overrightarrow{CB}=4\overrightarrow{F_2A}$，所以$\triangle F_1AF_2\backsim\triangle F_1BC$. 设$|F_1F_2|=2c$，则$|F_2C|=6c$，设$|AF_1|=t$，则$|BF_1|=4t$，$|AB|=3t$. 因为 BF_2 平分$\angle F_1BC$，由角平分线定理可知，$\frac{|BF_1|}{|BC|}=\frac{|F_1F_2|}{|F_2C|}=\frac{2c}{6c}=\frac{1}{3}$，所以$|BC|=3|BF_1|=12t$，所以$|AF_2|=\frac{1}{4}|BC|=3t$. 由双曲线定义知$|AF_2|-|AF_1|=2a$，即 $3t-t=2a$，解得 $t=a$. 又由$|BF_1|-|BF_2|=2a$，得$|BF_2|=4t-2a=2t=2a$，所以$|AB|=|AF_2|=3a$，即$\triangle ABF_2$ 是等腰三角形. 由余弦定理知 $\cos\angle F_1BF_2=\frac{|BF_1|^2+|BF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|BF_1||BF_2|}=\frac{|BA|^2+|BF_2|^2-|AF_2|^2}{2|AB||BF_2|}$，



即$\frac{16a^2+4a^2-4c^2}{16a^2}=\frac{1}{3}$，化简得 $11a^2=3c^2$，所以 $8a^2=3b^2$，则双曲线 Γ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}x$.

13. -4　画出可行域(图略)知，当直线 $z=2x-y$ 过点$(-3,-2)$时，z 取得最小值-4.

14. 6;17　执行程序框图，

$n=1,S=0,S=-S+2^1=2,n=2$，满足 $2\leqslant P$；

$S=(-1)^2S+2^2=6,n=3$，满足 $6\leqslant P$；

$S=(-1)^3S+2^3=2,n=4$，满足 $2\leqslant P$；

$S=(-1)^4S+2^4=18,n=5$，满足 $18>P$.

所以 $6\leqslant P\leqslant 17$，$P\in\mathbf{N}^*$，所以正整数 P 的最小值和最大值分别为 6 和 17.

15. $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$　设这个黄金三角形的另一个底角为 B，顶角为 A，因为$\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以 $\cos C=\frac{BC}{2AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，则 $\cos 2C=2\cos^2C-1=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

16. 8　设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r，边长为 a，正三棱柱的高为 $2h$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2=2^2-h^2$，即 $a^2=12-3h^2$，所以正三棱柱的体积 $V=S_{\triangle ABC}\times 2h=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3(4-h^2)h=\frac{3\sqrt{3}}{2}(-h^3+4h)$. 又 $V'=\frac{3\sqrt{3}}{2}(-3h^2+4)$，当 $h\in(0,\frac{2\sqrt{3}}{3})$时，$V'>0$，此时函数单调递增，当 $h\in(\frac{2\sqrt{3}}{3},2)$时，$V'<0$，此时函数单调递减，所以当 $h=\frac{2\sqrt{3}}{3}$时，函数 $V=\frac{3\sqrt{3}}{2}(-h^3+4h)$取得最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times(4-\frac{4}{3})=8$.

17.(1)证明:由 $na_{n+1}=3(n+1)a_n$,得 $a_{n+1}=\frac{3(n+1)a_n}{n}$, ………………………………… 1 分

所以$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{3a_n}{n}$, ………………………………………………………… 3 分

故$\{\frac{a_n}{n}\}$是公比为 3 的等比数列. …………………………………………………… 4 分

(2)解:由(1)得$\frac{a_n}{n}=\frac{3}{1}\times 3^{n-1}=3^n$,则 $a_n=n\times 3^n$,$b_n=\frac{n}{3^n}$. ………………………… 6 分

所以 $T_n=\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^n}$,

所以$\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\cdots+\frac{n}{3^{n+1}}$. ………………………………………… 7 分

两式相减,得$\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}$, ……………………………… 9 分

所以$\frac{2}{3}T_n=\frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}$, ………………………………………………… 11 分

解得 $T_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\times 3^n}$. ……………………………………………………… 12 分

18.解:(1)由题意知 $100\times(0.0010\times 2+0.0035+a+0.0020)=1$,

解得 $a=0.0025$, ……………………………………………………………………… 1 分

分数段[450,550)对应的频率为 0.1,[550,650)对应的频率为 0.35,[650,750)对应的频率为 0.25,设中位数为 x,则 $x\in[650,750)$. ………………………………………… 3 分

由 $0.1+0.35+(x-650)\times 0.0025=0.5$,解得 $x=670$. ……………………………… 5 分

(2)由题意知从分数段[650,750)对应的学生中抽取 5 人,从[850,950]对应的学生中抽取 2 人,随机变量 X 的所有可能取值为 0,1,2. ………………………………………… 7 分

则 $P(X=0)=\frac{C_2^0C_5^3}{C_7^3}=\frac{2}{7}$, ……………………………………………………… 8 分

$P(X=1)=\frac{C_2^1C_5^2}{C_7^3}=\frac{4}{7}$, ……………………………………………………………… 9 分

$P(X=2)=\frac{C_2^2C_5^1}{C_7^3}=\frac{1}{7}$, ……………………………………………………… 10 分

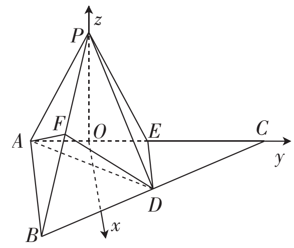
随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

……………………………………………………………………………………… 11 分

所以 $E(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$. ……………………………………… 12 分

19. (1)证明:因为 DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线,



所以 $DE /\!/ AB$. ………………………………………… 1 分

因为 $AC \perp AB$,所以 $DE \perp AE$,$DE \perp PE$, …………………… 3 分

又 $AE \cap PE = E$,所以 $DE \perp$ 平面 PAE, ……………………… 4 分

因为 $DE \subset$ 平面 $ABDE$,所以平面 $PAE \perp$ 平面 $ABDE$. …… 5 分

(2)解:取 AE 的中点 O,连接 PO,因为 $PA = PE = AE$,所以 $PO \perp AE$.

因为平面 $PAE \perp$ 平面 $ABDE$,所以 $PO \perp$ 平面 $ABDE$,且 $PO = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………… 6 分

分别以 $\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OP}$ 的方向为 y,z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $P(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$,$B(\sqrt{2},-\frac{1}{2},0)$,$D(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2},0)$,$A(0,-\frac{1}{2},0)$,$F(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$,

所以 $\overrightarrow{AP} = (0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$,$\overrightarrow{AD} = (\frac{\sqrt{2}}{2},1,0)$,$\overrightarrow{AF} = (\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$. ……………………………… 8 分

设 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$ 是平面 ADF 的法向量,可得 $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x + y = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{4}z = 0, \end{cases}$ 令 $x = \sqrt{2}$,得 $\boldsymbol{n} = (\sqrt{2},$

$-1,-\sqrt{3})$, ……………………………………………………………… 10 分

则 $\cos\langle \overrightarrow{AP},\boldsymbol{n} \rangle = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AP}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AP}|} = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\sqrt{6} \times 1} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$,

所以 PA 与平面 ADF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. ………………………………… 12 分

20. (1)解:当 $a = \mathrm{e}$ 时,因为 $f(x) = \mathrm{e}^x + (1-\mathrm{e})x - 1$,所以 $f'(x) = \mathrm{e}^x + 1 - \mathrm{e}$, …………… 1 分

令 $f'(x) = 0$,得 $x = \ln(\mathrm{e}-1)$, ……………………………………………… 2 分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(\mathrm{e}-1))$ 上单调递减,在 $(\ln(\mathrm{e}-1),+\infty)$ 上单调递增. ………… 4 分

(2)证明:(法一)易知当 $x \in (1,+\infty)$ 时,$\ln x < x - 1$,$\ln \frac{1}{x} < \frac{1}{x} - 1$,所以 $1 < \frac{x-1}{\ln x} < x$. …

……………………………………………………………………… 6 分

由题设知 $a > 1$,$f'(x) = a^x \ln a + 1 - a$. ……………………………………… 7 分

令 $f'(x) = 0$,得 $x_0 = \frac{\ln \frac{a-1}{\ln a}}{\ln a}$, …………………………………………… 8 分

由上可知 $1 < \frac{a-1}{\ln a} < a$,$0 < \ln \frac{a-1}{\ln a} < \ln a$,故 $0 < x_0 < 1$. ………………………… 10 分

当 $x < x_0$ 时,$f'(x) < 0$,$f(x)$ 单调递减,当 $x > x_0$ 时,$f'(x) > 0$,$f(x)$ 单调递增. …… 11 分

又 $f(0) = f(1) = 0$,所以当 $0 < x < 1$ 时,$f(x) < 0$. ………………………………… 12 分

(法二)因为 $f'(x) = a^x \ln a + 1 - a$,且 $a > 1$,所以 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增. ………… 5 分

又 $f'(0)=\ln a+1-a$，设 $g(a)=\ln a+1-a$，则 $g'(a)=\frac{1}{a}-1<0$，可知 $g(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(a)<g(1)=0$，即 $f'(0)<0$. ······································· 7 分

又 $f'(1)=a\ln a+1-a$，设 $h(a)=a\ln a+1-a$，则 $h'(a)=\ln a>0$，可知 $h(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(a)>h(1)=0$，即 $f'(1)>0$. ······································· 9 分

所以存在唯一的 $x_0\in(0,1)$，使得 $f'(x_0)=0$，且 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,1)$ 上单调递增. ······································· 11 分

因为 $f(0)=f(1)=0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<0$. ······································· 12 分

21. (1)解：由题意可得，抛物线 $C_1: y^2=8x$ 的焦点为 $F(2,0)$，准线 $l: x=-2$. ··············· 1 分

不妨设点 $M(a,b)(a>0,b>0)$，则 $|MF|=a+2=10$，即 $a=8$，可得 $b^2=64$，即 $b=8$，

所以 $M(8,8)$，则直线 MF 的斜率 $k_{MF}=\frac{8-0}{8-2}=\frac{4}{3}$. ······································· 3 分

因为 $FM\perp FN$，所以直线 NF 的斜率 $k_{NF}=-\frac{3}{4}$，所以直线 NF 的方程为 $y=-\frac{3}{4}(x-2)$，

令 $x=-2$，解得 $y=3$，即 $N(-2,3)$，故 $|NF|=\sqrt{(-2-2)^2+(3-0)^2}=5$. ············ 5 分

(2)证明：设 $P(t,y_0)$，由 $t\neq m\pm r$，$y_0\neq\pm m$，知过 P 所作圆 C_2 的切线的斜率 k 存在且非零，每条切线都与 C_1 有两个交点，设切线方程为 $y-y_0=k(x-t)$，即 $kx-y+(y_0-kt)=0$，故 $\frac{|km+y_0-kt|}{\sqrt{1+k^2}}=r$，整理得 $[(m-t)^2-r^2]k^2+2y_0(m-t)k+(y_0^2-r^2)=0$，① ············ 7 分

则过 P 所作的两条切线 PA，PC 的斜率 k_1，k_2 分别是方程①的两个实根，

故有 $k_1+k_2=\frac{2y_0(t-m)}{(m-t)^2-r^2}$，$k_1k_2=\frac{y_0^2-r^2}{(m-t)^2-r^2}$. ② ······································· 8 分

联立 $\begin{cases}y-y_0=k(x-t),\\ y^2=8x,\end{cases}$ 消去 x 得 $ky^2-8y+8(y_0-kt)=0$，③

设点 A,B,C,D 的纵坐标分别为 y_1,y_2,y_3,y_4，由③得 $y_1y_2=8(\frac{y_0}{k_1}-t)$，

同理可得 $y_3y_4=8(\frac{y_0}{k_2}-t)$. ······································· 9 分

于是得 $y_1y_2y_3y_4=64(\frac{y_0}{k_1}-t)(\frac{y_0}{k_2}-t)=64[\frac{y_0^2-ty_0(k_1+k_2)}{k_1k_2}+t^2]$.

设 $y_0^2-ty_0(k_1+k_2)=\lambda k_1k_2$（其中 λ 为常数），

把②式代入整理得 $y_0^2(m^2-t^2-r^2-\lambda)+\lambda r^2=0$， ······································· 10 分

欲使上式与 y_0 的取值无关，则当且仅当常数 $\lambda=0$ 且 $m^2=t^2+r^2(r\neq 0)$ 时，A,B,C,D 四点的纵坐标乘积为定值 $64t^2$. ······································· 12 分

22. 解：(1)曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+3\cos\alpha,\\ y=-2+3\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），其普通方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=9$，即 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$， ······································· 2 分

则 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta-4=0$. ······································· 3 分

直线 C_2 的方程为 $y=\sqrt{3}x$，

所以直线 C_2 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$. ………………………………………………… 5 分

(2)设 $M(\rho_1,\theta)$，$N(\rho_2,\theta)$，

将 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$代入 $\rho^2-2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta-4=0$，………………………………… 7 分

得 $\rho^2+(2\sqrt{3}-1)\rho-4=0$，……………………………………………………………………… 8 分

所以 $\rho_1\rho_2=-4$， ………………………………………………………………………………… 9 分

所以 $|OM|\cdot|ON|=|\rho_1\rho_2|=4$. ………………………………………………………………… 10 分

23. 解：(1)化简得 $|x+2|-2|x-1|>-3$，……………………………………………………………… 1 分

当 $x\geqslant 1$ 时，解得 $x<7$，所以 $1\leqslant x<7$，………………………………………………………… 2 分

当 $x\leqslant -2$ 时，解得 $x>1$，此时无解，……………………………………………………………… 3 分

当 $-2<x<1$ 时，解得 $x>-1$，所以 $-1<x<1$. ………………………………………………… 4 分

综上所述，原不等式的解集为$(-1,7)$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $f(x)=\begin{cases}-3, x\leqslant -2,\\ 2x+1, -2<x<1,\\ 3, x\geqslant 1,\end{cases}$ ……………………………………………………… 7 分

所以 $f(x)_{\max}=3$. ……………………………………………………………………………………… 8 分

由题意知 $|1-m|\leqslant 3$，解得 $-2\leqslant m\leqslant 4$，

所以 m 的取值范围是$[-2,4]$. ……………………………………………………………………… 10 分