

2023 届高三考试

数学试题参考答案(理科)

1. C 【解析】本题考查集合的运算,考查数学运算的核心素养.

$$\complement_U A = (-4, -3) \cup [2, 4).$$

2. A 【解析】本题考查复数的四则运算,考查数学运算的核心素养.

因为 $z = 2 - i$, 所以 $z\bar{z} = 5$, 则 $z\bar{z} - 2 + 2i = 3 + 2i$.

3. D 【解析】本题考查等比数列的通项公式及求和公式,考查数学运算的核心素养.

因为公比 $q = \frac{a_2 + a_3 + a_4}{a_1 + a_2 + a_3} = 2$, 所以 $S_6 - S_3 = a_4 + a_5 + a_6 = q^3(a_1 + a_2 + a_3) = 8 \times 7 = 56$.

4. B 【解析】本题考查函数的图象和性质,考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

因为 $f(-x) = \cos x \cdot \ln \frac{\pi-x}{\pi+x} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数, 排除 A, D, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\cos x > 0$, $\ln \frac{\pi-x}{\pi+x} > 0$, 所以 $f(x) > 0$, 排除 C, 故选 B.

5. C 【解析】本题考查三角函数的性质,考查数学运算与直观想象的核心素养.

由题意, $g(x) = \sin[\frac{\omega}{2}(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6}] = \sin(\frac{\omega}{2}x + \frac{\pi}{6} - \frac{\omega\pi}{12})$, 因为 $y = g(x)$ 为奇函数, 所以 $\frac{\pi}{6} - \frac{\omega\pi}{12} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 解得 $\omega = 2 - 12k (k \in \mathbb{Z})$, 又 $\omega > 0$, 所以当 $k = 0$ 时, ω 取得最小值 2.

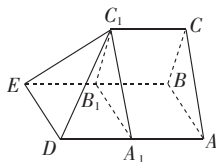
6. A 【解析】本题考查函数的性质,考查逻辑推理的核心素养.

因为 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{4x}{1+x} = 4 - \frac{4}{1+x}$ 是增函数. 又因为 $f(1) = 2$, 所以 $f(2x-3) < 2$ 可化为 $|2x-3| < 1$, 解得 $1 < x < 2$.

7. D 【解析】本题考查三视图,考查直观想象与数学运算的核心素养.

如图, 这是所求多面体的直观图, 它可以看成由直三棱柱与四棱锥组合而成, 所以体积

$$V = (\frac{1}{2} \times 2 \times 3) \times 2 + \frac{1}{3} \times (2 \times 2) \times 3 = 10.$$



8. B 【解析】本题考查统计的知识,考查数据分析与数学运算的核心素养.

设女生身高频率分布直方图中的组距为 Δx , 由 $(a + 1.5a + 2a + 2.5a + 3a)\Delta x = 1$, 得 $a\Delta x = 0.1$, 所以女生身高频率分布直方图中 A 层次频率为 20%, B 层次频率为 30%, C 层次频率为 25%, D 层次频率为 15%, E 层次频率为 10%. 因为男、女生样本数未知, 所以 A 层次中男、女生人数不能比较, 即选项 A 错误; 同理, D 层次女生在女生样本数中频率与 E 层次男生在男生样本数中频率相等, 都是 15%, 但因男、女生人数未知, 所以在整个样本中频率不一定相等, 即 C 错误; 设女生人数为 n , 男生人数为 $1000 - n$, 但因男、女生人数可能不相等, 则 B 层次的学生数为 $0.3n + 0.25 \times (1000 - n) = 0.05n + 250$, C 层次的学生数为 $0.25n + 0.3 \times (1000 - n) = 300 - 0.05n$, 因为 n 不确定, 所以 $0.05n + 250$ 与 $300 - 0.05n$ 可能不相等, 即 D 错误; 女生 A, B 两个层次的频率之和为 50%, 所以女生的样本身高中位数为 B, C 层次的分界点, 男生 A, B 两个层次的频率之和为 35%, 显然中位数落在 C 层次内, 所以样本中男生身高的中位数比女生身高的中位数大, B 正确.

9. B 【解析】本题考查三棱锥中线面角的正弦值的计算,考查直观想象与数学建模的核心素养.

设 $AB = BC = 2$, CD 的中点为 E, 连接 AE, BE(图略), 易知 $\angle BAE$ 是直线 AB 与平面 ACD 所成的角, 因为

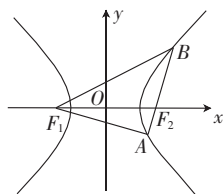
$$AB \perp BE, \text{ 所以 } \sin \angle BAE = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 + 3}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

10. D 【解析】本题考查排列组合的知识,考查数学抽象与数学建模的核心素养.

先选出 2 名志愿者安排到 A 社区, 再把剩下的 3 名志愿者分成两组, 分配到其他两个社区, 则不同的安排方法共有 $C_5^2 C_3^2 A_2^2 = 60$ 种.

11. C 【解析】本题考查双曲线的性质,考查推理论证能力与数学运算的核心素养.

如图, 设 $|AF_1| = m$, 则 $|AF_2| = m - 2a$. 又 $|AB| = 2|AF_1|$, 所以 $|BF_2| = m + 2a$, 所以 $|BF_1| = m + 4a$. 又 $AF_1 \perp AB$, 所以 $|BF_1| = \sqrt{5}m$, 由 $m + 4a = \sqrt{5}m$, 得 $m = (\sqrt{5} + 1)a = |AF_1|$, 则 $|AF_2| = m - 2a = (2\sqrt{5} - 1)a$, 而 $|F_1F_2| = 2c$, 则 $4c^2 = (\sqrt{5} + 1)^2 a^2 + (\sqrt{5} - 1)^2 a^2$, 化简得 $c^2 = 3a^2$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$.



12. A 【解析】本题考查对数的大小比较, 考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

(方法一) $a = \frac{4}{\ln 2}$, $b = \frac{6}{\ln 3}$, $c = \frac{10}{\ln 5}$, 令 $f(x) = \frac{2x}{\ln x}$, 则 $a = f(2)$, $b = f(3)$, $c = f(5)$, 且 $f'(x) = \frac{2 \ln x - 2}{(\ln x)^2}$. 易

知 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增. 又因为 $a = \frac{4}{\ln 2} = \frac{8}{2 \ln 2} = \frac{8}{\ln 4} = f(4)$, $3 < 4 < 5$, 所以 $b < a < c$.

(方法二) a, b, c 均为正数. 由 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3} \times \frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{\ln 9}{\ln 8} > 1$, 得 $a > b$. 由 $\frac{c}{a} = \frac{5}{2} \times \frac{\ln 2}{\ln 5} = \frac{\ln 32}{\ln 25} > 1$, 得 $c > a$, 所以 $c > a > b$.

13. 81 【解析】本题考查等差数列的通项公式, 考查数学运算的核心素养.

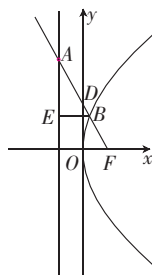
因为 $a_2 + a_4 = 2a_3 = 14$, 所以 $a_3 = 7$, 又 $a_1 = 3$, 所以公差 $d = 2$, 从而 $a_{40} = 3 + 2 \times 39 = 81$.

14. 1 【解析】本题考查平面向量的垂直以及求模, 考查数学运算的核心素养.

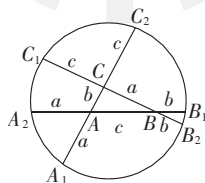
因为 $a \perp (a + 2b)$, 所以 $a^2 + 2a \cdot b = 0$, $|a + b|^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2 = 1$, 则 $|a + b| = 1$.

15. $y^2 = 8x$ 【解析】本题考查抛物线的概念与性质, 考查逻辑推理的核心素养.

过点 B 作抛物线 C 准线的垂线, 垂足为 E , 由抛物线的定义知, $|BF| = |BE|$, 又 $|AB| = \sqrt{5}|BF|$, 所以 $|AE| = 2|BE|$, 所以 $\tan \angle EAB = \frac{1}{2}$, 所以 $\tan \angle ODF = \frac{1}{2}$. 又 $|OF| = \frac{p}{2}$, 所以 $|OD| = p$, 所以 $S_{\triangle DOF} = 4 = \frac{1}{2} \times \frac{p}{2} \times p = \frac{p^2}{4}$, 则 $p = 4$, 所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 8x$.



16. $\sqrt{229}$ 【解析】本题考查直线与圆, 考查直观想象与数学抽象的核心素养.



因为 $|CC_1| = |CC_2|$, $|CA_1| = |CB_2|$, 所以康威圆的圆心在 $\angle ACB$ 的平分线上, 同理可知康威圆的圆心在 $\angle ABC$ 的平分线上, 即康威圆的圆心为 $\triangle ABC$ 的内心. 因为 $a^2 + b^2 = c^2$, 所以 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径 $r = \frac{5+12-13}{2} = 2$, 则康威圆的半径 $R = \sqrt{r^2 + (\frac{5+12+13}{2})^2} = \sqrt{229}$.

17. 解: (1) 因为 $(b-c)(\sin B + \sin C) = (a+c)\sin A$,

所以 $(b-c)(b+c) = a(a+c)$, 2 分

展开得 $a^2 + c^2 - b^2 = -ac$, 所以 $\cos B = \frac{-ac}{2ac} = -\frac{1}{2}$, 4 分

因为 $0 < B < \pi$, 所以 $B = \frac{2\pi}{3}$ 6 分

(2) 由 (1) 知 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4}ac = \sqrt{3}$, 解得 $ac = 4$, 8 分

因为 $b = \frac{\sqrt{3}(a+c)}{2}$, 由余弦定理得 $a^2 + c^2 - b^2 = 2accos B = -ac$, 10 分

即 $(a+c)^2 - \frac{3(a+c)^2}{4} = ac = 4$, 解得 $a+c = 4$, $b = 2\sqrt{3}$, 11 分

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c = 2\sqrt{3} + 4$ 12 分

评分细则:

【1】第一问, 写出 $(b-c)(b+c)=a(a+c)$, 得 2 分, 写出 $\cos B = \frac{-ac}{2ac} = -\frac{1}{2}$, 累计得 4 分, 第一问全部正确解出, 累计得 6 分.

【2】第二问, 用面积公式求出 $ac=4$, 累计得 8 分, 最后求出正确答案, 累计得 12 分.

【3】其他情况根据评分标准按步骤给分.

18. 解: (1) 学生甲恰好答对两题的概率 $P = (\frac{3}{4})^2 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{16}$ 4 分

(2) 随机变量 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 5 分

所以 $P(X=0) = (\frac{1}{4})^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{48}$, 6 分

$P(X=1) = C_2^1 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + (\frac{1}{4})^2 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$, 7 分

由(1)知 $P(X=2) = \frac{7}{16}$, 8 分

$P(X=3) = (\frac{3}{4})^2 \times \frac{2}{3} = \frac{3}{8}$, 9 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{8}$

..... 10 分

$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{7}{16} + 3 \times \frac{3}{8} = \frac{13}{6}$ 12 分

评分细则:

【1】第一问, 算出 $P = \frac{7}{16}$, 得本步骤的 4 分.

【2】第二问, 写出随机变量 X 的可能取得 1 分, 每算出一个概率得 1 分, 正确写出期望累计得 12 分.

19. (1) 证明: 因为 $ED \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $CD \perp DE$ 1 分

因为 $BD \perp CD$, $BD \cap DE = D$, 所以 $CD \perp$ 平面 BDE 2 分

因为 $DE = 2CF$, 且 H 为 DE 的中点, 所以 $CF = DH$, 3 分

又因为 $CF \parallel DH$, 所以四边形 $CDHF$ 是平行四边形, 则 $HF \parallel DC$, 4 分

所以 $HF \perp$ 平面 BDE 5 分

(2) 解: 以 D 为坐标原点, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DE}$ 的方向分别为 x , y , z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$ 6 分

设 $AD=2$, 则 $D(0,0,0)$, $B(\sqrt{3},0,0)$, $E(0,0,2)$, $F(0,1,1)$, $P(0,0,\frac{1}{3})$,

$\overrightarrow{BP} = (-\sqrt{3}, 0, \frac{1}{3})$, $\overrightarrow{BF} = (-\sqrt{3}, 1, 1)$ 7 分

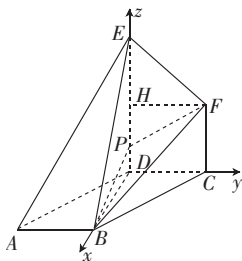
设平面 BFP 的法向量为 $m = (x, y, z)$,

由 $\begin{cases} \overrightarrow{BP} \cdot m = 0, \\ \overrightarrow{BF} \cdot m = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -\sqrt{3}x + \frac{1}{3}z = 0, \\ -\sqrt{3}x + y + z = 0, \end{cases}$ 8 分

不妨令 $x=1$, 则 $m = (1, -2\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ 9 分

因为 $BD \perp$ 平面 PCD , 所以可取平面 PDF 的法向量为 $n = (1, 0, 0)$, 10 分

因为 $\cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| |n|} = \frac{1}{1 \times \sqrt{1^2 + (-2\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{10}}{20}$,



所以二面角 $B-PF-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{20}$ 12 分

评分细则:

【1】第一问,证出 $CD \perp DE$,得 1 分,证出 $HF \parallel DC$,累计得 4 分,第一问全部证完累计得 5 分(若第一问就用空间向量法证线面垂直,参考上述步骤给分).

【2】第二问,建立空间直角坐标系得 1 分,写出相关点和相关向量的坐标,得 1 分,计算出平面 BFP 的法向量得 2 分,写出平面 PDF 的一个法向量得 1 分,直至正确求出二面角的余弦值累计得 12 分.

【3】若用传统做法,作出二面角的平面角得 1 分,简单证明得 2 分,整个题完全正确得满分.

20. 解:(1)由右顶点是 $M(2,0)$ 得 $a=2$,又离心率 $e=\frac{1}{2}=\frac{c}{a}$,所以 $c=1$, 2 分

所以 $b^2=a^2-c^2=3$,所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 4 分

(2)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,显然直线 l 的斜率存在.

设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$,联立方程组 $\begin{cases} y=k(x-4), \\ 3x^2+4y^2=12, \end{cases}$

消去 y 得 $(4k^2+3)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$,由 $\Delta>0$,得 $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$,

所以 $x_1+x_2=\frac{32k^2}{4k^2+3},x_1x_2=\frac{64k^2-12}{4k^2+3}$ 6 分

因为点 $D(x_2,-y_2)$,所以直线 AD 的方程为 $y=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)+k(x_1-4)$ 7 分

又 $y_1+y_2=k(x_1+x_2-8)$, 8 分

所以直线 AD 的方程可化为 $y=\frac{24k}{(x_2-x_1)(4k^2+3)}x+\frac{kx_1(x_1+x_2-8)}{x_2-x_1}+\frac{k(x_1-4)(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$,..... 10 分

即 $y=\frac{24k}{(x_2-x_1)(4k^2+3)}x-\frac{24k}{(x_2-x_1)(4k^2+3)}=\frac{24k}{(x_2-x_1)(4k^2+3)}(x-1)$,..... 11 分

所以直线 AD 恒过点 $(1,0)$ 12 分

评分细则:

(方法二)(1)同上(1). 4 分

(2)设直线 l 的方程为 $x=my+4$,联立方程组 $\begin{cases} x=my+4, \\ 3x^2+4y^2=12, \end{cases}$ 消去 x 得 $(3m^2+4)y^2+24my+36=0$,

由 $\Delta>0$,得 $m>2$ 或 $m<-2$,所以 $y_1+y_2=-\frac{24m}{3m^2+4},y_1y_2=\frac{36}{3m^2+4}$ 6 分

因为点 $D(x_2,-y_2)$,则直线 AD 的方程为 $y=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)+y_1$ 7 分

又 $x_1-x_2=my_1+4-my_2-4=m(y_1-y_2)$, 8 分

所以直线 AD 的方程可化为 $y=\frac{-(y_1+y_2)}{m(y_2-y_1)}(x-my_1-4)+y_1=-\frac{y_1+y_2}{m(y_2-y_1)}x+$

$\frac{(y_1+y_2)(my_1+4)+y_1m(y_2-y_1)}{m(y_2-y_1)}=-\frac{y_1+y_2}{m(y_2-y_1)}x+\frac{2my_1y_2+4(y_1+y_2)}{m(y_2-y_1)}=\frac{24}{(3m^2+4)(y_2-y_1)}(x-1)$,

此时直线 AD 恒过点 $(1,0)$, 10 分

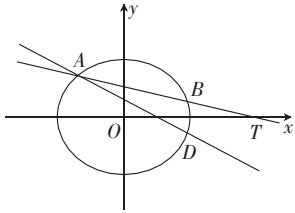
当直线 l 的斜率为 0 时,直线 l 的方程为 $y=0$,也过点 $(1,0)$ 11 分

综上,直线 AD 恒过点 $(1,0)$ 12 分

说明:第(2)问还可以先猜想出定点在 x 轴上,写出直线 AD 的方程,令 $y=0$,求出定点坐标为 $(1,0)$ 后再加以证明,也可以得满分.

21. (1)解:由题意知, $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 1 分

$\ln x-mx+2=0$ 有两个根,等价于方程 $\frac{\ln x+2}{x}=m$ 有两个根.



设 $g(x)=\frac{\ln x+2}{x}$, 即 $g(x)=\frac{\ln x+2}{x}$ 的图象与直线 $y=m$ 有两个交点. 2 分

因为 $g'(x)=\frac{-\ln x-1}{x^2}$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递减, 3 分

$g(x)_{\max}=g(\frac{1}{e})=e$, 当 $x \rightarrow 0+$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$, 由图可知, m 的取值范围是 $(0, e)$.
..... 5 分

(2) 证明: 由 (1) 知方程 $\frac{\ln x+2}{x}=m$ 的两个根分别为 x_1, x_2 , 则 $\frac{\ln x_1+2}{x_1}=\frac{\ln x_2+2}{x_2}$.
令 $t_1=\frac{1}{x_1}, t_2=\frac{1}{x_2}$, 则 $2t_1-t_1 \ln t_1=2t_2-t_2 \ln t_2$, 6 分

设 $t_1 < t_2, h(t)=2t-t \ln t$, 则 $h'(t)=2-\ln t$, 易知 $h(t)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 且 $h(t_1)=h(t_2), 0 < t_1 < e < t_2$ 7 分

设 $H(t)=h(t)-h(2e-t) (0 < t < e)$, 则 $H'(t)=h'(t)+h'(2e-t)$.
因为 $H'(t)=2-\ln t+[1-\ln(2e-t)]=2-\ln(-t^2+2et) > 2-\ln(-e^2+2e^2)=0$,
所以 $H(t)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 9 分

所以 $H(t_1) < H(e)=0$, 即 $h(t_1) < h(2e-t_1)$, 从而 $h(t_2) < h(2e-t_1)$ 10 分

因为 $0 < t_1 < e < t_2$, 所以 $2e-t_1 > e$,
又 $h(t)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $t_2 > 2e-t_1$, 即 $t_1+t_2 > 2e$, 11 分

所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} > 2e$ 12 分

评分细则:

【1】第一问, 写出 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 得 1 分, 写出 $f(x)$ 有两个零点的等价条件累计得 2 分, 算出 $g'(x)=\frac{-\ln x-1}{x^2}$, 并得出 $g(x)$ 的单调区间累计得 3 分, 求出参数 m 的取值范围, 累计得 5 分.

【2】第二问, 写出 $2t_1-t_1 \ln t_1=2t_2-t_2 \ln t_2$, 累计得 6 分, 写出 $0 < t_1 < e < t_2$, 累计得 7 分, 推出 $H(t)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 累计得 9 分, 推出 $h(t_2) < h(2e-t_1)$, 累计得 10 分, 直到证出所要求证的不等式, 累计得 12 分.

【3】采用其他方法, 参照本评分标准依步骤给分.

22. 解: (1) 曲线 C 的普通方程为 $(x+1)^2+y^2=4$ 2 分

由 $\rho \sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$, 得 $\rho \sin \theta \cos \frac{\pi}{4}+\rho \cos \theta \sin \frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$, 即 $\rho \sin \theta+\rho \cos \theta=2$,
因为 $x=\rho \cos \theta, y=\rho \sin \theta$, 所以直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-2=0$ 4 分

(2) 因为直线 l 的斜率为 -1 , 所以 l 的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$,

所以过点 $M(-2, 1)$ 且与直线 l 平行的直线 l' 的方程可设为 $\begin{cases} x=-2-\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数}).$ 6 分

设点 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2 , 将 $\begin{cases} x=-2-\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ 代入 $(x+1)^2+y^2=4$, 可得 $(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2+(1+\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2=4$, 整理得 $t^2+2\sqrt{2}t-2=0$, 则 $\Delta > 0, t_1+t_2=-2\sqrt{2}, t_1t_2=-2$, 8 分

所以 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{|MA|+|MB|}{|MA||MB|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{(-2\sqrt{2})^2+4 \times 2}}{2}=2$ 10 分

评分细则:

【1】第一问, 圆的方程没有写成标准方程, 不扣分, 累计得 2 分, 写出直线 l 的方程, 不管哪种形式, 不扣分,

累计得 4 分.

【2】第二问, 写出直线 l 的参数方程, 累计得 6 分, 联立方程组并写出 $t_1+t_2=-2\sqrt{2}$, $t_1 t_2=-2$, 累计得 8 分,

求出 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|} = 2$, 累计得 10 分.

23. 证明: (1) 由已知可得 $3=4a^2+b^2+16c^2+(4a^2+b^2)+(4a^2+16c^2)+(b^2+16c^2) \geq 4a^2+b^2+16c^2+4ab+16ac+8bc=(2a+b+4c)^2$, 3 分

当且仅当 $2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 等号成立. 4 分

又 a, b, c 均为正数, 所以 $2a+b+4c \leq \sqrt{3}$ 5 分

(2) 因为 $(2a)^2+b^2+(4c)^2 \geq 3 \sqrt[3]{(2a)^2 b^2 (4c)^2}$,

当且仅当 $2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 等号成立, 7 分

所以 $3 \times 4 \sqrt[3]{(abc)^2} \leq 1$, 整理得 $(abc)^2 \leq (\frac{1}{12})^3$, 8 分

所以 $\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{16c^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{4a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{16c^2}} = \frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{1}{a^2 b^2 c^2}} \geq \frac{3}{4} \sqrt[3]{12^3} = 9$,

当且仅当 $2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 等号成立. 10 分

评分细则:

(证法二) 证明: (1) 由柯西不等式得 $[(2a)^2+b^2+(4c)^2](1^2+1^2+1^2) \geq (2a+b+4c)^2$, 3 分

所以 $(2a+b+4c)^2 \leq 3$ 4 分

因为 a, b, c 均为正数, 所以 $2a+b+4c \leq \sqrt{3}$ (当且仅当 $2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 等号成立). 5 分

(2) $(\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{16c^2})(4a^2+b^2+16c^2)$

$= 1+1+1 + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{16c^2}{4a^2} + \frac{4a^2}{b^2} + \frac{16c^2}{b^2} + \frac{4a^2}{16c^2} + \frac{b^2}{16c^2}$ 7 分

$= 3 + (\frac{b^2}{4a^2} + \frac{4a^2}{b^2}) + (\frac{16c^2}{4a^2} + \frac{4a^2}{16c^2}) + (\frac{16c^2}{b^2} + \frac{b^2}{16c^2})$ 8 分

$\geq 3 + 2\sqrt{\frac{b}{2a} \cdot \frac{2a}{b}} + 2\sqrt{\frac{4c}{2a} \cdot \frac{2a}{4c}} + 2\sqrt{\frac{4c}{b} \cdot \frac{b}{4c}} = 9$,

当且仅当 $2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 等号成立. 10 分