

2023 届高三考试

数学试题参考答案(文科)

1. D 【解析】本题考查集合的运算,考查数学运算的核心素养.

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 8\}.$$

2. A 【解析】本题考查复数的四则运算,考查数学运算的核心素养.

$$\text{因为 } (2-i)a = (-\frac{4}{b} + 2i)b, \text{ 所以 } 2a - ai = -4 + 2bi, \text{ 解得 } a = -2, b = 1.$$

3. D 【解析】本题考查等比数列的通项公式及求和公式,考查数学运算的核心素养.

$$\text{由 } \begin{cases} a_1 + a_2 = 3, \\ 2a_1 + a_2 = 4, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = 2, \end{cases} \text{ 公比 } q = 2, \text{ 所以 } S_6 = \frac{1-2^6}{1-2} = 63.$$

4. B 【解析】本题考查函数的图象和性质,考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

$$\text{因为 } f(-x) = \cos x \cdot \ln \frac{\pi-x}{\pi+x} = -f(x), \text{ 所以 } f(x) \text{ 是奇函数, 排除 A, D, 当 } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \text{ 时, } \cos x > 0, \ln \frac{\pi+x}{\pi-x} > 0, \text{ 所以 } f(x) > 0, \text{ 排除 C, 故选 B.}$$

5. A 【解析】考查质数的概念与古典概型概率的求法,考查数据处理能力.

集合 $\{x \in \mathbb{N} | 10 \leq x \leq 20\}$ 中的质数有 11, 13, 17, 19, 共 4 个数, 任取 2 个不同的质数 a, b , 记作 (a, b) 的情况有 $(11, 13), (11, 17), (11, 19), (13, 17), (13, 19), (17, 19), (13, 11), (17, 11), (19, 11), (17, 13), (19, 13), (19, 17)$, 共 12 种; 符合 $|a-b| \geq 4$ 的有 $(11, 17), (11, 19), (13, 17), (13, 19), (17, 11), (19, 11), (17, 13), (19, 13)$, 共 8 种, 所以概率为 $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

6. C 【解析】本题考查双曲线的性质,考查推理论证能力与数学运算的核心素养.

$$\text{因为 } C \text{ 的一个焦点 } F(c, 0) \text{ 到 } C \text{ 的一条渐近线的距离为 } \frac{2}{7}c, \text{ 所以 } b = \frac{2}{7}c, \text{ 两边平方得 } 4c^2 = 49b^2. \text{ 又 } b^2 = c^2 - a^2, \text{ 所以 } 4c^2 = 49(c^2 - a^2), \text{ 化简得 } \frac{c^2}{a^2} = \frac{49}{45}, \text{ 所以 } \frac{c}{a} = \frac{7\sqrt{5}}{15}.$$

7. C 【解析】本题考查三角函数的性质,考查数学运算与直观想象的核心素养.

$$\text{由题意, } g(x) = \sin[\frac{\omega}{2}(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6}] = \sin(\frac{\omega}{2}x + \frac{\pi}{6} - \frac{\omega\pi}{12}), \text{ 因为 } y = g(x) \text{ 为奇函数, 所以 } \frac{\pi}{6} - \frac{\omega\pi}{12} = k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ 解得 } \omega = 2 - 12k (k \in \mathbb{Z}), \text{ 又 } \omega > 0, \text{ 所以当 } k = 0 \text{ 时, } \omega \text{ 取得最小值 } 2.$$

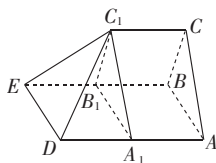
8. B 【解析】本题考查统计的知识,考查数据分析与数学运算的核心素养.

设女生身高频率分布直图中的组距为 Δx , 由 $(a+1.5a+2a+2.5a+3a)\Delta x = 1$, 得 $a\Delta x = 0.1$, 所以女生身高频率分布直图中 A 层次频率为 20%, B 层次频率为 30%, C 层次频率为 25%, D 层次频率为 15%, E 层次频率为 10%. 因为男、女生样本数未知, 所以 A 层次中男、女生人数不能比较, 即选项 A 错误; 同理, D 层次女生在女生样本数中频率与 E 层次男生在男生样本数中频率相等, 都是 15%, 但因男、女生人数未知, 所以在整个样本中频率不一定相等, 即 C 错误; 设女生人数为 n , 男生人数为 $1000-n$, 但因男、女生人数可能不相等, 则 B 层次的学生数为 $0.3n + 0.25 \times (1000-n) = 0.05n + 250$, C 层次的学生数为 $0.25n + 0.3 \times (1000-n) = 300 - 0.05n$, 因为 n 不确定, 所以 $0.05n + 250$ 与 $300 - 0.05n$ 可能不相等, 即 D 错误; 女生 A, B 两个层次的频率之和为 50%, 所以女生的样本身高中位数为 B, C 层次的分界点, 男生 A, B 两个层次的频率之和为 35%, 显然中位数落在 C 层次内, 所以样本中男生身高的中位数比女生身高的中位数大, B 正确.

9. D 【解析】本题考查三视图,考查直观想象与数学运算的核心素养.

如图, 这是所求多面体的直观图, 它可以看成由直三棱柱与四棱锥组合而成, 所以体积

$$V = (\frac{1}{2} \times 2 \times 3) \times 2 + \frac{1}{3} \times (2 \times 2) \times 3 = 10.$$



10. A 【解析】本题考查函数的性质,考查直观想象与逻辑推理的核心素养.

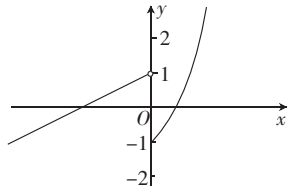
因为 $f(-x)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 当 $x>0$ 时, $f(x)=\frac{4x}{1+x}=4-\frac{4}{1+x}$ 是增函数. 又因为 $f(1)=2$, 所以 $f(2x-3)<2$ 可化为 $|2x-3|<1$, 解得 $1<x<2$.

11. B 【解析】本题考查三棱锥中线面角的正弦值的计算, 考查直观想象与数学建模的核心素养.

设 $AB=BC=2$, CD 的中点为 E , 连接 AE, BE (图略), 易知 $\angle BAE$ 是直线 AB 与平面 ACD 所成的角, 因为 $AB\perp BE$, 所以 $\sin\angle BAE=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2^2+3}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

12. A 【解析】本题考查分段函数及导数应用, 考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

设 $f(n)=e^n-2=k-2, -1\leq k-2<1$, 则 $n=\ln k (1\leq k<3)$, 由 $f(m)=\frac{m}{2}+1=k-2$, 得 $m=2k-6$, 所以 $n-m=\ln k-2k+6$. 设 $g(k)=\ln k-2k+6, k\in[1, 3)$, 则 $g'(k)=\frac{1}{k}-2\leq 0$, $g(k)$ 在 $[1, 3)$ 上单调递减, 故 $g(k)_{\max}=g(1)=4$.



13. -3 【解析】本题考查平面向量垂直以及数量积, 考查数学运算的核心素养.

因为 $a\perp b$, 所以 $3-m+2m=0$, 则 $m=-3$.

14. 20 【解析】本题考查等差数列的通项公式, 考查数学运算的核心素养.

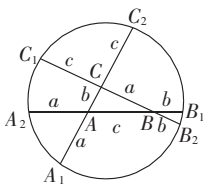
因为 $a_2+a_4=2a_3=14$, 所以 $a_3=7$, 又 $a_1=3$, 所以公差 $d=2$, 从而 $a_m=3+2(m-1)=41$, 解得 $m=20$.

15. 3 【解析】本题考查抛物线的概念与性质, 考查逻辑推理的核心素养.

不妨设 B 在第一象限, 则 $B(\frac{p}{8}, \frac{p}{2})$, $k_{BF}=-\frac{4}{3}$, 则直线 AF 的方程为 $y=-\frac{4}{3}(x-\frac{p}{2})$, 令 $x=-\frac{p}{2}$, 得 $y_A=\frac{4p}{3}$, 由 $S_{\triangle AOF}=3=\frac{1}{2}\times\frac{p}{2}\times\frac{4p}{3}=\frac{p^2}{3}$, 解得 $p=3$.

16. $\sqrt{229}$ 【解析】本题考查直线与圆, 考查直观想象与数学抽象的核心素养.

因为 $|CC_1|=|CC_2|, |CA_1|=|CB_2|$, 所以康威圆的圆心在 $\angle ACB$ 的平分线上, 同理可知康威圆的圆心在 $\angle ABC$ 的平分线上, 即康威圆的圆心为 $\triangle ABC$ 的内心. 因为 $a^2+b^2=c^2$, 所以 $\angle ACB=90^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径 $r=\frac{5+12-13}{2}=2$, 则康威圆的半



径 $R=\sqrt{r^2+(\frac{5+12+13}{2})^2}=\sqrt{229}$.

17. 解: (1) 因为 $(b-c)(\sin B+\sin C)=(a+c)\sin A$,

所以 $(b-c)(b+c)=a(a+c)$, 2 分

展开得 $a^2+c^2-b^2=-ac$, 所以 $\cos B=\frac{-ac}{2ac}=-\frac{1}{2}$, 4 分

因为 $0<B<\pi$, 所以 $B=\frac{2\pi}{3}$ 6 分

(2) 由 (1) 知 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\sqrt{3}$, 解得 $ac=4$, 8 分

因为 $b=\frac{\sqrt{3}(a+c)}{2}$, 由余弦定理得 $a^2+c^2-b^2=2accos B=-ac$, 10 分

即 $(a+c)^2-\frac{3(a+c)^2}{4}=ac=4$, 解得 $a+c=4, b=2\sqrt{3}$, 11 分

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=2\sqrt{3}+4$ 12 分

评分细则:

【1】第一问, 写出 $(b-c)(b+c)=a(a+c)$, 得 2 分, 写出 $\cos B=\frac{-ac}{2ac}=-\frac{1}{2}$, 累计得 4 分, 第一问全部正确解出, 累计得 6 分.

【2】第二问,用面积公式求出 $ac=4$,累计得 8 分,最后求出正确答案,累计得 12 分.

【3】其他情况根据评分标准按步骤给分.

18. 解:(1)该校高一年级近视的学生人数为 $1000 \times 40\% \times 40\% + 1000 \times 60\% \times 25\% = 160 + 150 = 310$, 3 分

从该校高一年级的学生中随机抽取 1 名学生,其近视率为 $\frac{310}{1000} = \frac{31}{100}$ 5 分

(2) 2×2 列联表为

	每天使用超过 1 h	每天使用不超过 1 h	合计
近视	160	150	310
不近视	240	450	690
合计	400	600	1000

..... 8 分

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{1000 \times (450 \times 160 - 240 \times 150)^2}{400 \times 600 \times 310 \times 690}$$
$$= \frac{1000 \times 36000 \times 36000}{400 \times 600 \times 310 \times 690} = \frac{18000}{713} \approx 25.25 > 10.828, \text{ 11 分}$$

所以有 99.9% 的把握认为该校学生每天使用手机的时长与近视率有关联. 12 分
评分细则:

【1】第一问,算出高一年级近视的学生数为 310,得 3 分,正确算出所求概率,累计得 5 分.

【2】第二问,正确填写列联表,累计得 8 分,算出 $K^2 = \frac{18000}{713} \approx 25.25 > 10.828$,近似数位不够,不扣分,累计得 11 分,正确写出结论累计得 12 分.

19. (1)证明:因为 $ED \perp$ 平面 $ABCD$,所以 $CD \perp DE$ 1 分

因为 $BD \perp CD, BD \cap DE = D$,所以 $CD \perp$ 平面 BDE 2 分

因为 $DE = 2CF$,且 H 为 DE 的中点,所以 $CF = DH$, 3 分

因为 $CF \parallel DH$,所以四边形 $CDHF$ 是平行四边形,则 $HF \parallel DC$, 4 分

所以 $HF \perp$ 平面 BDE 5 分

(2)解:因为 $DP = \frac{1}{4} DE = 1$,所以 $DP = 1, DE = 4$,

又 $DE = 2CF = 2CD = 2BD$,所以 $PH = 1, CD = BD = 2$, 6 分

所以 $FP = BP = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, BF = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$, 7 分

所以 $S_{\triangle BFP} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{5-3} = \sqrt{6}$ 8 分

设点 E 到平面 BFP 的距离为 d ,则 $V_{E-BFP} = \frac{\sqrt{6}}{3} d$ 9 分

又 $S_{\triangle EFP} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$,所以 $V_{B-EFP} = \frac{1}{3} \times 3 \times 2 = 2$, 11 分

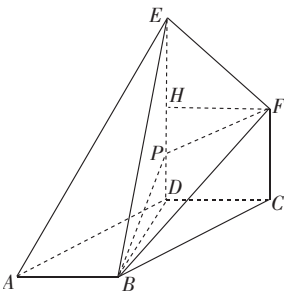
由 $\frac{\sqrt{6}}{3} d = 2$,得 $d = \sqrt{6}$,即点 E 到平面 BFP 的距离为 $\sqrt{6}$ 12 分

评分细则:

【1】第一问,证出 $CD \perp DE$,得 1 分,证出 $HF \parallel DC$,累计得 4 分,第一问全部证完累计得 5 分.

【2】第二问,算出 $PH = 1, CD = BD = 2$,累计得 6 分,算出 $S_{\triangle BFP} = \sqrt{6}$,累计得 8 分,算出 $V_{B-EFP} = 2$,累计得 11 分,直至正确求出点 E 到平面 BFP 的距离,累计得 12 分.

20. 解:(1)当 $a = 4$ 时, $f(x) = 2\ln x + \frac{4}{x}$,其定义域为 $(0, +\infty)$, 1 分



可得 $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} = \frac{2x-4}{x^2}$ 2 分

当 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 2)$, 单调递增区间为 $(2, +\infty)$ 4 分

(2) 由 $g(x) = \frac{f(x)-2}{x} = \frac{2\ln x}{x} + \frac{a}{x^2} - \frac{2}{x}$, $x \in (1, e^2)$,

可得 $g'(x) = \frac{2-2\ln x}{x^2} + \frac{2}{x^2} - \frac{2a}{x^3} = \frac{4x-2x\ln x-2a}{x^3}$ 5 分

设 $h(x) = 4x - 2x\ln x - 2a$, 则 $h'(x) = 4 - (2 + 2\ln x) = 2 - 2\ln x$, 6 分

令 $h'(x) = 0$, 即 $2 - 2\ln x = 0$, 解得 $x = e$.

当 $x \in (1, e)$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x \in (e, e^2)$ 时, $h'(x) < 0$.

所以 $h(x)$ 在区间 $(1, e)$ 上单调递增, 在区间 (e, e^2) 上单调递减, 8 分

且 $h(1) = 4 - 2a$, $h(e) = 2e - 2a$, $h(e^2) = -2a$, 9 分

显然 $h(e) > h(1) > h(e^2)$, 若 $g(x)$ 在 $(1, e^2)$ 上存在极值, 则满足 $\begin{cases} h(e) > 0, \\ h(e^2) < 0, \end{cases}$ 解得 $0 < a < e$, 11 分

所以实数 a 的取值范围为 $(0, e)$ 12 分

评分细则:

【1】第一问, 写出 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 得 1 分, 算出 $f'(x) = \frac{2x-4}{x^2}$, 累计得 2 分, 得出 $f(x)$ 的单调区间, 累计得 4 分.

【2】第二问, 求出 $g'(x) = \frac{4x-2x\ln x-2a}{x^3}$, 累计得 5 分, 求出 $h'(x) = 2-2\ln x$, 累计得 6 分, 得出 $h(x)$ 的单调区间, 累计得 8 分, 算出 $h(1) = 4-2a$, $h(e) = 2e-2a$, $h(e^2) = -2a$, 累计得 9 分, 求出参数 a 的取值范围, 累计得 12 分.

【3】采用其他方法, 参照本评分标准依步骤给分.

21. 解: (1) 由右顶点是 $M(2, 0)$ 得 $a = 2$, 又离心率 $e = \frac{1}{2} = \frac{c}{a}$, 所以 $c = 1$, 2 分

所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$, 所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4 分

(2) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 显然直线 l 的斜率存在.

设直线 l 的方程为 $y = k(x - 4)$, 联立方程组 $\begin{cases} y = k(x - 4), \\ 3x^2 + 4y^2 = 12, \end{cases}$

消去 y 得 $(4k^2 + 3)x^2 - 32k^2x + 64k^2 - 12 = 0$, 由 $\Delta > 0$, 得 $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$,

所以 $x_1 + x_2 = \frac{32k^2}{4k^2 + 3}$, $x_1x_2 = \frac{64k^2 - 12}{4k^2 + 3}$ 6 分

因为点 $D(x_2, -y_2)$, 所以直线 AD 的方程为 $y = \frac{y_1 + y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) + k(x_1 - 4)$ 7 分

又 $y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2 - 8)$, 8 分

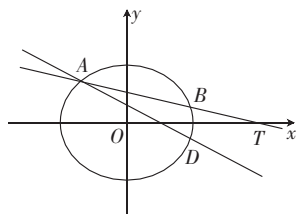
所以直线 AD 的方程可化为 $y = \frac{24k}{(x_2 - x_1)(4k^2 + 3)}x + \frac{kx_1(x_1 + x_2 - 8)}{x_2 - x_1} + \frac{k(x_1 - 4)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$, 10 分

即 $y = \frac{24k}{(x_2 - x_1)(4k^2 + 3)}x - \frac{24k}{(x_2 - x_1)(4k^2 + 3)} = \frac{24k}{(x_2 - x_1)(4k^2 + 3)}(x - 1)$, 11 分

所以直线 AD 恒过点 $(1, 0)$ 12 分

评分细则:

(方法二)(1)同上(1). 4 分



(2) 设直线 l 的方程为 $x=my+4$, 联立方程组 $\begin{cases} x=my+4, \\ 3x^2+4y^2=12, \end{cases}$ 消去 x 得 $(3m^2+4)y^2+24my+36=0$,

由 $\Delta > 0$, 得 $m > 2$ 或 $m < -2$, 所以 $y_1+y_2 = -\frac{24m}{3m^2+4}$, $y_1y_2 = \frac{36}{3m^2+4}$ 6 分

因为点 $D(x_2, -y_2)$, 则直线 AD 的方程为 $y = \frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)+y_1$ 7 分

又 $x_1-x_2=my_1+4-my_2-4=m(y_1-y_2)$, 8 分

所以直线 AD 的方程可化为 $y = \frac{-(y_1+y_2)}{m(y_2-y_1)}(x-my_1-4)+y_1 = -\frac{y_1+y_2}{m(y_2-y_1)}x +$

$\frac{(y_1+y_2)(my_1+4)+y_1m(y_2-y_1)}{m(y_2-y_1)} = -\frac{y_1+y_2}{m(y_2-y_1)}x + \frac{2my_1y_2+4(y_1+y_2)}{m(y_2-y_1)} = \frac{24}{(3m^2+4)(y_2-y_1)}(x-1),$

此时直线 AD 恒过点 $(1, 0)$, 10 分

当直线 l 的斜率为 0 时, 直线 l 的方程为 $y=0$, 也过点 $(1, 0)$ 11 分

综上, 直线 AD 恒过点 $(1, 0)$ 12 分

说明: 第(2)问还可以先猜想出定点在 x 轴上, 写出直线 AD 的方程, 令 $y=0$, 求出定点坐标为 $(1, 0)$ 后再加以证明, 也可以得满分.

22. 解: (1) 曲线 C 的普通方程为 $(x+1)^2+y^2=4$ 2 分

由 $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$, 得 $\rho \sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \rho \cos \theta \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, 即 $\rho \sin \theta + \rho \cos \theta = 2$,

因为 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, 所以直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-2=0$ 4 分

(2) 因为直线 l 的斜率为 -1 , 所以 l 的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$,

所以过点 $M(-2, 1)$ 且与直线 l 平行的直线 l' 的方程可设为 $\begin{cases} x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数}).$ 6 分

设点 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2 , 将 $\begin{cases} x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ 代入 $(x+1)^2+y^2=4$, 可得 $(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}t)^2 + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t)^2$

$= 4$, 整理得 $t^2 + 2\sqrt{2}t - 2 = 0$, 则 $\Delta > 0$, $t_1+t_2 = -2\sqrt{2}$, $t_1t_2 = -2$, 8 分

所以 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|} = \frac{|MA|+|MB|}{|MA||MB|} = \frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|} = \frac{\sqrt{(-2\sqrt{2})^2+4 \times 2}}{2} = 2$ 10 分

评分细则:

【1】第一问, 圆的方程没有写成标准方程, 不扣分, 累计得 2 分, 写出直线 l 的方程, 不管哪种形式, 不扣分, 累计得 4 分.

【2】第二问, 写出直线 l' 的参数方程, 累计得 6 分, 联立方程组并写出 $t_1+t_2 = -2\sqrt{2}$, $t_1t_2 = -2$, 累计得 8 分,

求出 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|} = 2$, 累计得 10 分.

23. 证明: (1) 由已知可得 $3 = 4a^2 + b^2 + 16c^2 + (4a^2 + b^2) + (4a^2 + 16c^2) + (b^2 + 16c^2) \geq 4a^2 + b^2 + 16c^2 + 4ab + 16ac + 8bc = (2a+b+4c)^2$, 3 分

当且仅当 $2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 等号成立. 4 分

又 a, b, c 均为正数, 所以 $2a+b+4c \leq \sqrt{3}$ 5 分

(2) 因为 $(2a)^2 + b^2 + (4c)^2 \geq 3 \sqrt[3]{(2a)^2 b^2 (4c)^2}$,

当且仅当 $2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,等号成立, 7 分

所以 $3 \times 4 \sqrt[3]{(abc)^2} \leq 1$,整理得 $(abc)^2 \leq (\frac{1}{12})^3$, 8 分

所以 $\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{16c^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{4a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{16c^2}} = \frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{1}{a^2 b^2 c^2}} \geq \frac{3}{4} \sqrt[3]{12^3} = 9,$

当且仅当 $2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,等号成立. 10 分

评分细则:

(证法二)证明:(1)由柯西不等式得 $[(2a)^2 + b^2 + (4c)^2](1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (2a + b + 4c)^2$, 3 分

所以 $(2a + b + 4c)^2 \leq 3$ 4 分

因为 a, b, c 均为正数,所以 $2a + b + 4c \leq \sqrt{3}$ (当且仅当 $2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,等号成立). 5 分

(2) $(\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{16c^2})(4a^2 + b^2 + 16c^2)$
 $= 1 + 1 + 1 + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{16c^2}{4a^2} + \frac{4a^2}{b^2} + \frac{16c^2}{b^2} + \frac{4a^2}{16c^2} + \frac{b^2}{16c^2}$ 7 分

$= 3 + (\frac{b^2}{4a^2} + \frac{4a^2}{b^2}) + (\frac{16c^2}{4a^2} + \frac{4a^2}{16c^2}) + (\frac{16c^2}{b^2} + \frac{b^2}{16c^2})$ 8 分

$\geq 3 + 2\sqrt{\frac{b}{2a} \cdot \frac{2a}{b}} + 2\sqrt{\frac{4c}{2a} \cdot \frac{2a}{4c}} + 2\sqrt{\frac{4c}{b} \cdot \frac{b}{4c}} = 9,$

当且仅当 $2a=b=4c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,等号成立. 10 分