数学(理工类)参考答案

评分说明:

1.本解答给出了一种或几种解法供参考,如果考生的解法与本解答不同,可根据试题的主要考查内容比照评分参考制定相应的评分细则。

2.对计算题,当考生的解答在某一步出现错误时,如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度,可视影响的程度决定后继部分的给分,但不得超过该部分正确解答应得分数的一半;如果后继部分的解答有较严重的错误,就不再给分。

3.解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4.只给整数分。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题(60 分)

1.命题意图:本小题主要考查函数的值域,集合的交集运算等基础知识;考查运算求解能力.

答案 B.因为集合 $A=\{y|y=x^2-2\}=[-2,+\infty)$,$B=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$,所以 $A\cap B=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$.

2.命题意图:本小题主要考查复数的概念,复数的模,复数的除法和加法运算等基础知识;考查运算求解能力.

答案 C.由复数 $z=3+4\mathrm{i}$,所以 $|z|+\dfrac{z}{\mathrm{i}}=\sqrt{3^2+4^2}+(3+4\mathrm{i})\cdot(-\mathrm{i})=9-3\mathrm{i}$.

3.命题意图:本小题主要考查两角和的正弦公式,诱导公式,三角函数求值等基础知识;考查运算求解能力.

答案 C.$\sin\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)=-\dfrac{1}{3}$.

另解:由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ 得 $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$,所以 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{3}$,则 $\sin\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{4}\right)=\sin\left[\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)-\pi\right]=-\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{3}$.

4.命题意图:本小题主要考查二项式定理,多项式乘法,展开式中项的系数等问题;考查运算求解能力,应用意识.

答案 B.由 $(x-2)^5$ 的展开式中含 x^3 项为 $C_5^2x^3(-2)^2$,含 x 的项为 $C_5^4x(-2)^4$,所以 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)(x-2)^5$ 的展开式中含 x^2 项是 $\left(-\dfrac{1}{x}\right)\cdot C_5^2x^3(-2)^2+x\cdot C_5^4x(-2)^4$,其系数为 40.

5. 命题意图：本小题主要考查直线与平面位置关系的判定与性质、平面的基本事实等基础知识；考查直观想象、逻辑推理等能力；考查化归与转化、特殊到一般等思想方法.

答案 B. 假设 E,F 分别为所在棱的中点，即可判断①③正确，②错误.

6. 命题意图：本小题主要考查等差数列的概念及性质，通项公式，前 n 项和公式等基础知识；考查运算求解能力，方程思想和函数思想，应用意识.

答案 D. 由题意可得 $a_1+a_5=2a_3=-18$，则 $a_3=-9$，因为 $S_9=-72$，即 $9a_5=-72$，故 $a_5=-8$，所以 $2d=a_5-a_3=1$，即 $d=\frac{1}{2}$.（法一）$a_n=a_3+(n-3)d=\frac{n}{2}-\frac{21}{2}$，令 $a_n=\frac{n}{2}-\frac{21}{2}\leqslant 0$，则 $n\leqslant 21$，且 $n=21$ 时，$a_{21}=0$，所以 S_n 取最小值时，n 的值为 20 或 21.

（法二）$a_1=a_3-2d=-10$，$S_n=n\cdot(-10)+\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}n^2-\frac{41}{4}n=\frac{1}{4}\left(n-\frac{41}{2}\right)^2-\frac{41^2}{4^2}$，

所以当 $n=20$ 或 $n=21$ 时，S_n 取得最小值.

7. 命题意图：本小题主要考查两条直线的交点、圆的标准方程等基础知识；考查推理论证、运算求解等能力；考查数形结合、化归与转化等思想方法.

答案 B. 解方程组 $\begin{cases}x+y+1=0,\\x+2y+1=0\end{cases}$ 得 $A(-1,0)$，因为圆 M 的半径为 2，所以当且仅当 $|BC|=2\sqrt{3}$ 时，$\angle BMC=120^\circ$，等价于 M 到直线 l 的距离为 1，又圆心 M 为 $(-2,0)$，$|AM|=1$，故这样的直线有并且只有一条（即 $x=-1$）.

8. 命题意图：本小题主要考查函数图象和性质、导数等基本知识；考查数形结合思想.

答案 B. 由题，$f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数，排除 A；又 $f(1)=\frac{2}{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}<1$，排除 C；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$，排除 D，故选 B.

9. 命题意图：本小题主要考查直线的斜率、直线与直线的位置关系、直线与抛物线的位置关系等基础知识；考查运算求解、推理论证等能力；考查数形结合、化归与转化等思想方法.

答案 B. 由已知，直线 OM 的斜率为 1，则 AB 的斜率为 -1. 因为点 $M(1,1)$ 在直线 AB 上，由 $\frac{1}{1-2p}=-1$ 解得 $p=1$. 所以，直线 AB 的方程为 $x=-y+2$，抛物线 C 的方程为 $y^2=2x$. 由此可得 A,B 的坐标分别为 $(3-\sqrt{5},-1+\sqrt{5})$，$(3+\sqrt{5},-1-\sqrt{5})$，所以，$|AB|=2\sqrt{10}$，故 $|OM|\cdot|AB|=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{10}=4\sqrt{5}$.

10. 命题意图：本小题主要考查概率、离散型随机变量的分布列等基础知识；考查抽象概括、运算求解等数学能力；考查概率统计等数学思想.

答案 C. 记随机选择的 3 个比赛项目中会决出奖牌的项目数为 X，则 X 的可能值为 1，2，3，且 $P(X=1)=\frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{3}{5}$，$P(X=3)=\frac{C_2^0C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，则 X 的均值 $EX=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}++3\times\frac{1}{5}=2$.

11. 命题意图:本小题主要考查双曲线的定义、双曲线的几何性质等基础知识;考查推理论证、运算求解等能力;考查数形结合、化归与转化、函数与方程等思想方法.

答案C. 由已知,双曲线C的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$,焦点为$F(2,0)$,离心率为$e=2$. 所以$|MA|+|MF|=|MA|+\sqrt{(x_M-2)^2+y_M^2}=|MA|+\sqrt{(x_M-2)^2+3(x_M^2-1)}=|MA|+\sqrt{4x_M^2-4x_M+1}=|MA|+2x_M-1$,整理有$|MA|+2x_M=|MA|+|MF|+1$. 又因为$(|MA|+|MF|)_{\min}=|AF|=\sqrt{(3-2)^2+5^2}=\sqrt{26}$,所以$|MA|+2x_M$的最小值为$\sqrt{26}+1$.

12. 命题意图:本小题主要考查函数、导数以及不等式等知识的综合应用;考查抽象概括能力、运算求解能力和创新能力;考查化归与转化等数学思想.

答案D. 由题$a=0.02$,$b=2\ln(\sin 0.01+\cos 0.01)=\ln(1+\sin 0.02)$,$c=\frac{6}{5}\ln 1.02$. 易证$x>0$时,$\ln(x+1)<x$,则$b=\ln(1+\sin 0.02)<\sin 0.02<0.02=a$;又$c-a=\frac{6}{5}\ln 1.02-0.02=\frac{6}{5}\left[\ln(1+0.02)-\frac{5}{6}\times 0.02\right]$,令$h(x)=\ln(1+x)-\frac{5}{6}x\left(0<x<\frac{1}{5}\right)$,则$h'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{5}{6}=\frac{1-5x}{6+6x}$,知$0<x<\frac{1}{5}$时,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增,则$0<x<\frac{1}{5}$时$h(x)>h(0)=0$,即$\ln(1+x)>\frac{5}{6}x$,所以$\ln(1+0.02)>\frac{5}{6}\times 0.02$,则$c-a>0$,即$c>a$,综上$a,b,c$的大小关系为$b<a<c$.

二、填空题(20分)

13. 命题意图:本小题主要考查平面向量的数量积,向量的坐标运算等基础知识;考查运算求解能力,应用意识.

答案10. 以C为坐标原点,CB,CA所在直线分别为x,y轴建立平面直角坐标系,由题意得$E(2,2)$,$F(4,1)$,即$\overrightarrow{CE}=(2,2)$,$\overrightarrow{CF}=(4,1)$,所以$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}=(2,2)\cdot(4,1)=10$.

14. 命题意图:本小题主要考查正弦型函数的性质,图象平移,奇偶性等基础知识;考查推理论证能力,应用意识.

解析:答案$-\frac{\pi}{6}$. 由$y=\sin(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$后所得函数为$y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$,因其图象关于$y$轴对称,即函数为偶函数,所以$-\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,故$k=-1$,此时$\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

15. 命题意图:本小题主要考查等比数列的通项公式等基础知识;考查阅读理解能力,运算求解能力,应用意识.

答案9984. 设A_0纸的面积为$S(\mathrm{cm}^2)$,根据题意,纸张面积是以S为首项,公比为$\frac{1}{2}$的等比数

列，则 A_4 纸的面积为 $S\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=624$，解得 $S=9984$.

16. 命题意图：本小题主要考查面面垂直的性质、棱锥体积的计算和球面的性质等基础知识；考查直观想象、推理论证、运算求解、创新等能力；考查数形结合、化归与转化等思想方法.

答案 $\frac{\sqrt{21}}{3}$. 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{ABCD}\times h$，由于底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，其面积是一个定值，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大，等价于 h 取得最大值. 由已知，$\triangle PAB$ 为一个圆的内接三角形，且 $AB=2$. 所以，当且仅当 $\triangle APB$ 为正三角形时，该四棱锥的体积最大. 此时，$h=\sqrt{3}$. 设正方形 $ABCD$ 的中心为 M，正三角形 PAB 的中心为 N，由题意，球心 O 为过 M 且垂直于平面 $ABCD$ 的直线与过 N 且垂直于平面 PAB 的直线的交点. 易知，$OM=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$AM=\sqrt{2}$，所以球半径等于 $\sqrt{OM^2+AM^2}=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

三、解答题(共 70 分)

(一)必考题

17. 命题意图：本小题主要考查回归方程、相关系数等基本知识；考查统计基本思想以及抽象概括、数据处理等能力和应用意识.

解析：(1)因为相关系数 $0<r_1<r_2$，所以模型② $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}\sqrt{x}$ 的拟合效果最好. ………… 3 分

(2) 令 $t=\sqrt{x}$，知 y 与 t 可用线性方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}t$ 拟合，则

$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{10}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{10}(t_i-\bar{t})^2}=\frac{49.16}{4.52}\approx10.876$，…………………………………………………… 5 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=72.65-10.876\times2.25\approx48.18$，…………………………………………………… 7 分

所以，y 关于 t 的线性回归方程为 $\hat{y}=48.18+10.88t$，

故 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=48.18+10.88\sqrt{x}$. …………………………………………… 9 分

2025 年，即 $x=14$ 时，$\hat{y}=48.18+10.88\sqrt{14}\approx48.18+10.88\times3.742\approx88.89$(亿元)，

此时，该县 2025 年乡村经济收入的估计值为 88.89 亿元. ……………………………… 12 分

18. 命题意图：本小题主要考查平面向量的数量积，三角函数的单调性，正弦定理，余弦定理，三角形内角和，函数值域等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，应用意识.

解析：(1) $f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\left(\sqrt{3}\sin\frac{x}{2},1\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{2},\sin^2\frac{x}{2}\right)$

$=\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}$ …………………………………………………………… 2 分

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1-\cos x}{2}$

$=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$. ………………………………………………………………… 4 分

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,

解得 $2k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$,

所以函数 $f(x)$的单调递增区间为$\left[2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right],k\in\mathbf{Z}$. ………………………… 6 分

(2)选择①,由$\frac{\sqrt{3}c}{a\cos B}+\tan A+\tan B=0$ 及正弦定理有$\frac{\sqrt{3}\sin C}{\sin A\cos B}+\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}=0$,

即$\frac{\sqrt{3}\sin C}{\sin A\cos B}=-\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B}=-\frac{\sin C}{\cos A\cos B}$, ……………………………… 8 分

所以 $\tan A=-\sqrt{3}$,因为 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. ……………………………………………… 9 分

所以 $B+C=\frac{\pi}{3}$,则 $0<B<\frac{\pi}{3}$,

所以$-\frac{\pi}{6}<B-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{6}$,则$-\frac{1}{2}<\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)<\frac{1}{2}$, ………………………………… 11 分

所以 $0<f(B)<1$. 即 $f(B)$的取值范围为$(0,1)$. …………………………………………… 12 分

选择②,由$(2c+b)\cos A+a\cos B=0$ 即正弦定理有

$2\sin C\cos A+\sin B\cos A+\sin A\cos B=0$,

所以 $2\sin C\cos A=-\sin(A+B)=-\sin C$, ………………………………………………… 8 分

所以 $\cos A=-\frac{1}{2}$.

因为 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. ……………………………………………………………… 9 分

所以 $B+C=\frac{\pi}{3}$,则 $0<B<\frac{\pi}{3}$,

所以$-\frac{\pi}{6}<B-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{6}$,则$-\frac{1}{2}<\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)<\frac{1}{2}$, ………………………………… 11 分

所以 $0<f(B)<1$. 即 $f(B)$的取值范围为$(0,1)$. …………………………………………… 12 分

选择③,由 a,b,c 成等比数列,则 $b^2=ac$, ………………………………………………… 7 分

由余弦定理得:$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}\geqslant\frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2}$, …………………………… 9 分

当且仅当 $a=c$ 时等号成立,所以 $0<B\leqslant\frac{\pi}{3}$,

所以$-\frac{\pi}{6}<B-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{6}$,则$-\frac{1}{2}<\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{1}{2}$, ………………………………… 11 分

所以 $0<f(B)\leqslant 1$. 即 $f(B)$的取值范围为$(0,1]$. …………………………………………… 12 分

19. 命题意图：本小题主要考查直线与平面垂直的性质与判定、平面与平面垂直的性质与判定、平面与平面所成的角等基础知识；考查直观想象、推理论证、运算求解能力；考查化归与转化、数形结合等思想方法.

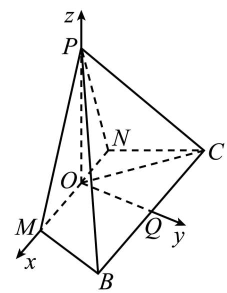
解析：设 BC 的中点为 Q，由已知，$PO\perp MN$，$QO\perp MN$.

因为二面角 $P-MN-B$ 是直二面角，

所以平面 $PMN\perp$ 平面 $BMNC$，

所以，$PO\perp$ 平面 $BMNC$，则 $PO\perp QO$.

于是，可建立如图所示空间直角坐标系 $O-xyz$. ………………… 2 分



设 $|MN|=2a(0<a<3)$，

则可以得到 $O(0,0,0)$，$M(a,0,0)$，$B(3,3\sqrt{3}-a\sqrt{3},0)$，

$C(-3,3\sqrt{3}-a\sqrt{3},0)$，$P(0,0,a\sqrt{3})$，$N(-a,0,0)$.

所以 $\overrightarrow{OC}=(-3,3\sqrt{3}-a\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{MB}=(3-a,3\sqrt{3}-a\sqrt{3},0)$，

$\overrightarrow{MP}=(-a,0,a\sqrt{3})$，$\overrightarrow{NM}=(2a,0,0)$. ………………………… 4 分

(1)因为 $BM\perp$ 平面 POC，

所以 $BM\perp OC$. ………………………………………………………… 5 分

于是，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{MB}=-3\times(3-a)+(3\sqrt{3}-a\sqrt{3})^2=-9+3a+27-18a+3a^2$

$=3a^2-15a+18=0$，

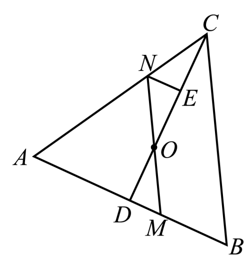
所以 $a=2$ 或 $a=3$(舍).

所以 MN 的长为 4. ………………………………………………………… 6 分

另解：由 $BM\perp$ 平面 POC，则 $BM\perp CO$，

即折叠前 $CO\perp AB$，如图，设垂足为 D， ………………………………… 2 分

易知 $\angle NCO=\angle NOC=\angle MOD=30^\circ$，



过点 N 作 $NE\perp CO$，垂足为 E，

则 $\mathrm{Rt}\triangle CEN\cong\mathrm{Rt}\triangle OEN\cong\mathrm{Rt}\triangle\angle ODM$，

所以 $DO=OE=EC$， ……………………………………………… 4 分

因为 $MN\parallel BC$，所以 $\dfrac{MO}{BC}=\dfrac{DO}{DC}=\dfrac{1}{3}$，

因为 $BC=6$，所以 $MO=\dfrac{1}{3}BC=2$，

而 O 是线段 MN 的中点，所以 $MN=4$. …………………………………… 6 分

(2)设平面 PMB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(3-a)x_1+(3\sqrt{3}-a\sqrt{3})y_1=0,\\ -ax_1+a\sqrt{3}z_1=0.\end{cases}$

令 $z_1=1$，有 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,1)$. ………………………………………………………… 9 分

显然，平面 PMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$， ………………………………………… 10 分

所以，$\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ………………………………………… 11 分

由题意可知，二面角 $N-PM-B$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ………………………………………… 12 分

20. 命题意图：本小题主要考查直线的方程、椭圆标准方程、直线与椭圆的位置关系、基本不等式等基础知识；考查推理论证、运算求解能力及创新能力；考查化归与转化、数形结合、函数与方程等思想方法.

解析：(1)依题意有 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $a=\sqrt{2}c$. ………………………………………………… 1 分

将 $\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 代入椭圆 C 的方程，得 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{2b^2}=1$. ………………………………………… 2 分

因为 $a^2=b^2+c^2$，

由上可得：$a=\sqrt{2}$，$b=c=1$. ……………………………………………………………… 3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………………………………………………… 4 分

(2)①由题知，切线 l 斜率存在，设直线 l：$y=k(x-x_0)+y_0$，联立 $\begin{cases}x^2+2y^2=2,\\ y=kx+y_0-kx_0,\end{cases}$

消去 y，得 $(1+2k^2)x^2+4k(y_0-kx_0)x+2(y_0-kx_0)^2-2=0$，

由 $\Delta=16k^2(y_0-kx_0)^2-4(1+2k^2)(2(y_0-kx_0)^2-2)=0$，

即 $(x_0^2-2)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-1=0$，

此时 $\Delta'=4x_0^2y_0^2-4(x_0^2-2)(y_0^2-1)=4x_0^2+8y_0^2-8=0$，

则 $k=\dfrac{2x_0y_0}{2(x_0^2-2)}=\dfrac{2x_0y_0}{2(-2y_0^2)}=-\dfrac{x_0}{2y_0}$，

则直线 l 的方程为 $y=-\dfrac{x_0}{2y_0}(x-x_0)+y_0$，即 $\dfrac{x_0}{2}x+y_0y-1=0$. ………………………… 7 分

另解：因为椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，

所以椭圆在第一象限内的一段对应的函数解析式为 $y=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{2}}\,(0<x<\sqrt{2})$.

由题意，直线 l 为曲线 $y=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{2}}\,(0<x<\sqrt{2})$ 在点 P 处的切线.

易知直线 l 的斜率为 $k=y'|_{x=x_0}=\left(\sqrt{1-\dfrac{x^2}{2}}\right)'|_{x=x_0}=-\dfrac{x_0}{2y_0}$， ……………………………… 6 分

则直线 l 的方程为 $y-y_0=-\dfrac{x_0}{2y_0}(x-x_0)$，即 $\dfrac{x_0}{2}x+y_0y-1=0$. ………………………… 7 分

②令 $y=0$,有 $M\left(\frac{2}{x_0},0\right)$;令 $x=0$,有 $N\left(0,\frac{1}{y_0}\right)$. ………………………………… 8 分

又 $\frac{x_0^{\ 2}}{2}+y_0^{\ 2}=1$,由上可得

$$S_{\triangle MON}=\frac{1}{2}|OM||ON|=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x_0}\cdot\frac{1}{y_0}=\frac{1}{x_0y_0}=\frac{\frac{x_0^{\ 2}}{2}+y_0^{\ 2}}{x_0y_0}$$

$$=\frac{x_0}{2y_0}+\frac{y_0}{x_0}\geqslant 2\sqrt{\frac{x_0}{2y_0}\cdot\frac{y_0}{x_0}}=\sqrt{2}.$$ ………………………………… 11 分

所以,$\triangle MON$ 的面积存在最小值$\sqrt{2}$,最小值当且仅当$\frac{x_0^{\ 2}}{2}=y_0^{\ 2}=\frac{1}{2}$时取得.

此时,点 P 的坐标为$\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ………………………………… 12 分

21. 命题意图:本小题主要考查函数极值、导数的几何意义、导数综合应用等基础知识,考查化归与转化等数学思想,考查推理论证能力、运算求解能力以及创新能力.

解析:(1)当 $a=\mathrm{e}$ 时,$f(x)=\mathrm{e}\ln x+\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}x+\mathrm{e}^2$,则 $f(1)=\mathrm{e}^2-\mathrm{e}$, ………………… 1 分

又 $f'(x)=\frac{\mathrm{e}}{x}+\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}$,则在点$(1,f(1))$处的切线斜率 $k=f'(1)=0$, ………………… 2 分

所以,切线方程为 $y=\mathrm{e}^2-\mathrm{e}$. ………………………………… 4 分

(2)解法 1:由题知 $f'(x)=\frac{a+x(\mathrm{e}^x-2\mathrm{e})}{x}$,其中 $x\geqslant\frac{1}{2}$,

设 $g(x)=a+x(\mathrm{e}^x-2\mathrm{e})$,则 $g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}$,

可知 $g'(x)$在区间$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上为增函数,且 $g'(1)=0$,

则$\frac{1}{2}\leqslant x<1$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$为减函数;$x>1$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$为增函数,

所以,$x\geqslant\frac{1}{2}$时,函数 $g(x)$的最小值 $g(x)_{\min}=g(1)=a-\mathrm{e}$. ………………… 5 分

①当 $a-\mathrm{e}\geqslant 0$,即 $a\geqslant\mathrm{e}$ 时,$g(x)\geqslant 0$,即 $f'(x)\geqslant 0$,$f(x)$为增函数,

则函数 $f(x)$的最小值 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant(\mathrm{e}-\ln 2)\mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}}-\mathrm{e}>0$,

由于 a 为整数,所以 $a\geqslant 3$ 时 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立. ………………………………… 6 分

②当 $a=2$ 时,$f(x)=2\ln x+\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}x+2\mathrm{e}$,$g(x)=2+x(\mathrm{e}^x-2\mathrm{e})$,

则 $g(x)$的最小值 $g(x)_{\min}=g(1)=2-\mathrm{e}<0$,又 $g(2)=2+2(\mathrm{e}^2-2\mathrm{e})>0$,

ⅰ)当 $x\geqslant 1$ 时,由于 $g(x)$为$[1,+\infty)$的增函数,

则存在 $x_0\in(1,2)$使得 $g(x_0)=0\left(\text{即 } \mathrm{e}^{x_0}=2\mathrm{e}-\frac{2}{x_0}\right)$,

若 $1<x<x_0$,$g(x)<0$,即 $f'(x)<0$,$f(x)$为减函数;

若 $x>x_0$，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$为增函数，

则 $f(x)_{极小值}=f(x_0)=2\ln x_0+e^{x_0}-2ex_0+2e=2(\ln x_0-ex_0-\frac{1}{x_0}+2e)$，其中 $x_0\in(1,2)$，

令 $u(x)=\ln x-ex-\frac{1}{x}+2e(1<x<2)$，则 $u'(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-e=\frac{-ex^2+x+1}{x^2}$，

可知 $1<x<2$ 时，$u'(x)<0$，$u(x)$在$(1,2)$时单调递减，

则 $u(x)>u(2)=\ln 2-\frac{1}{2}>0$，即 $f(x)_{极小值}=f(x_0)>0$，…………………………………… 8 分

ⅱ）当$\frac{1}{2}\leqslant x<1$ 时，由于 $g(x)$为减函数，且 $g\left(\frac{1}{2}\right)=2+\frac{1}{2}(\sqrt{e}-2e)>0$，

则存在 $x_1\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $g(x_1)=0$，

则$\frac{1}{2}<x<x_1$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$为增函数；

则 $x_1<x<1$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$为减函数，

则 x_1 为 $f(x)$的极大值点，且 $f(x_1)>f(1)>f(x_0)>0$，又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=e+\sqrt{e}-2\ln 2>0$，

所以，$x\geqslant\frac{1}{2}$时，$f(x)\geqslant 0$，

则 $a=2$ 也符合题意. …………………………………………………………………………… 10 分

③当 $a\leqslant 1$ 时，$g(x)_{\min}=g(1)=a-e<0$，

由于 $g(x)$为$(1,+\infty)$的增函数，

则存在实数 $m>1$，且 $x\in(1,m)$，使得 $g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，故 $f(x)$为减函数，

则当 $x\in(1,m)$时，$f(x)<f(1)=(a-1)e\leqslant 0$，

故 $a\leqslant 1$ 不符合题意，舍去.

综上所述，整数 a 的最小值为 2. ………………………………………………………………… 12 分

解法 2：由于 $x\geqslant\frac{1}{2}$时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，由 $f(1)\geqslant 0$，所以 $a\geqslant 1$.

【或由 $f\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant 0$，得 $a\geqslant\frac{e-\sqrt{e}}{e-\ln 2}$，且 $0<\frac{e-\sqrt{e}}{e-\ln 2}<1$.】………………………………… 6 分

①当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x+e^x-2ex+e$，则 $f'(x)=\frac{1+x(e^x-2e)}{x}$，

令 $g(x)=1+x(e^x-2e)$，则 $g(x)$为区间$[1,+\infty)$上的增函数，

则 $g(x)$的最小值 $g(x)_{\min}=g(1)=2-e<0$，

则存在实数 $t>1$，使得 $x\in(1,t)$，使得 $g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，

故 $f(x)$为$(1,t)$上的减函数，所以 $f(x)<f(1)=0$，

故 $a=1$ 不符合题意，舍去. …………………………………………………………………… 8 分

②当 $a=2$ 时，$f(x)=2\ln x+e^x-2ex+2e$，$g(x)=2+x(e^x-2e)$，

则 $g(x)$ 的最小值 $g(x)_{\min}=g(1)=2-e<0$，又 $g(2)=2+2(e^2-2e)>0$，

ⅰ）当 $x\geqslant 1$ 时，由于 $g(x)$ 为 $[1,+\infty)$ 的增函数，

则存在 $x_0\in(1,2)$ 使得 $g(x_0)=0\left(\text{即 } e^{x_0}=2e-\dfrac{2}{x_0}\right)$，

当 $1<x<x_0$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数；

当 $x>x_0$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，

则 $f(x)_{\text{极小值}}=f(x_0)=2\ln x_0+e^{x_0}-2ex_0+2e=2\left(\ln x_0-ex_0-\dfrac{1}{x_0}+2e\right)$，其中 $x_0\in(1,2)$，

令 $u(x)=\ln x-ex-\dfrac{1}{x}+2e(1<x<2)$，则 $u'(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-e=\dfrac{-ex^2+x+1}{x^2}$，

当 $1<x<2$ 时，$u'(x)<0$，$u(x)$ 在 $(1,2)$ 时单调递减，

则 $u(x)>u(2)=\ln 2-\dfrac{1}{2}>0$，即 $f(x)_{\text{极小值}}=f(x_0)>0$，………………………………… 10 分

ⅱ）当 $\dfrac{1}{2}\leqslant x<1$ 时，$g(x)$ 为减函数，$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=2+\dfrac{1}{2}(\sqrt{e}-2e)>0$，

则存在 $x_1\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $g(x_1)=0$，

则 $\dfrac{1}{2}<x<x_1$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数；

则 $x_1<x<1$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数，

则 x_1 为 $f(x)$ 的极大值点，且 $f(x_1)>f(1)>f(x_0)>0$，又 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=e+\sqrt{e}-2\ln 2>0$，

所以，$x\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)\geqslant 0$，

则 $a=2$ 符合题意.

综上所述，整数 a 的最小值为 2. ………………………………………………………… 12 分

(二)选考题(10 分)

22. 命题意图：本小题主要考查直线与圆的极坐标方程、参数方程、直角坐标方程，直线与圆的位置关系等基础知识；考查推理论证、运算求解能力；考查化归与转化、数形结合、方程等思想方法.

解析：(1)由直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数)可知

直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha$； ………………………………………………………… 2 分

由 $\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，$\rho^2=x^2+y^2$，……………………………………………… 3 分

代入 $x^2+y^2+8y+7=0$ 中，

可得曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2+8\rho\sin\theta+7=0$. …………………………………… 5 分

说明：写直线 l 的极坐标方程时，不必要求说明 ρ 可以取负，或加上 $\theta=\pi+\alpha$.

(2)联立直线 l 和曲线 C 的极坐标方程 $\begin{cases}\rho^2+8\rho\sin\theta+7=0,\\ \theta=\alpha,\end{cases}$ 整理，得

$\rho^2+8\rho\sin\alpha+7=0$.

上述关于 ρ 的一元二次方程有两个实根 ρ_1,ρ_2，

于是 $\rho_1+\rho_2=-8\sin\alpha,\rho_1\cdot\rho_2=7$. …………………………………………………… 7 分

由题意，可设 $|\rho_1|=|OM|,|\rho_2|=|ON|$.

因为 $||OM|-|ON||=2\sqrt{5}$，则 $|OM|^2+|ON|^2-2|OM||ON|=20$.

即 $|\rho_1|^2+|\rho_2|^2-2|\rho_1\rho_2|=20$，又 $\rho_1\rho_2>0$，则有 $\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2=20$，

所以 $(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2=64\sin^2\alpha-28=20$，

所以 $\sin^2\alpha=\frac{3}{4}$，所以 $\tan^2\alpha=3$.

故直线 l 的斜率为 $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$. ……………………………………………………………… 10 分

23. 命题意图：本小题主要考查绝对值的函数的最值、不等式证明等知识，考查运算求解能力，推理论证能力，化归与转化思想.

解析：(1)当 $x<-1$ 时，$f(x)=-3x>3$；当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)=x+4\geqslant 3$；当 $x>2$ 时，$f(x)=3x>6$. 则 $f(x)$ 的最小值为 3. ………………………………………………………… 2 分

由于存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_0)\leqslant 4-a^2$，

则只需 $f(x)$ 的最小值 3 不大于 $4-a^2$ 即可， ………………………………………………… 4 分

即有 $3\leqslant 4-a^2$，解得 $-1\leqslant a\leqslant 1$，

故 a 的取值范围是 $[-1,1]$. ……………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可知 $f(x)$ 的最小值为 $M=3$，则 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=3$，

则 $3(a+b+c)=\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)(a+b+c)=14+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{4a}{b}+\frac{4c}{b}+\frac{9a}{c}+\frac{9b}{c}$ …………… 6 分

$=14+\left(\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\right)+\left(\frac{4c}{b}+\frac{9b}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{9a}{c}\right)$ ……………………………………………… 8 分

$=14+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}+2\sqrt{\frac{4c}{b}\cdot\frac{9b}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{9a}{c}}$

$\geqslant 36$，

当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b},\frac{4c}{b}=\frac{9b}{c},\frac{c}{a}=\frac{9a}{c}$ 且 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=3$ 取“=”，即 $a=2,b=4,c=6$ 取“=”.

所以 $a+b+c\geqslant 12$. …………………………………………………………………………… 10 分