数学(文史类)参考答案

评分说明:

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考,如果考生的解法与本解答不同,可根据试题的主要考查内容比照评分参考制定相应的评分细则。

2. 对计算题,当考生的解答在某一步出现错误时,如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度,可视影响的程度决定后继部分的给分,但不得超过该部分正确解答应得分数的一半;如果后继部分的解答有较严重的错误,就不再给分。

3. 解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题(60 分)

1. 命题意图:本小题主要考查一次不等式的解法,集合的交集运算等基础知识;考查运算求解能力.

答案 B. 因为集合 $A=\{x|x+2\geqslant 0\}=[-2,+\infty)$,$B=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$,所以 $A\cap B=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$.

2. 命题意图:本小题主要考查复数的概念,复数的模,复数的共轭复数等基础知识;考查运算求解能力.

答案 D. 由复数 $z=3+4\mathrm{i}$,所以 $|z|+\bar{z}=\sqrt{3^2+4^2}+(3-4\mathrm{i})=8-4\mathrm{i}$.

3. 命题意图:本小题主要考查不等式性质和充要条件等基础知识;考查推理论证能力,应用意识.

答案 A. 由$\begin{cases}x>1,\\y>1\end{cases}$显然有 $x+y>2$,但由 $x+y>2$ 不能推出$\begin{cases}x>1,\\y>1\end{cases}$所以“$\begin{cases}x>1,\\y>1\end{cases}$”是“$x+y>2$”的充分不必要条件.

4. 命题意图:本小题主要考查两角和的正弦公式,诱导公式,三角函数求值等基础知识;考查运算求解能力.

答案 C. $\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)=-\frac{1}{3}$.

另解:由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$ 得 $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$,所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$,则 $\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)=$

$\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\pi\right]=-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{3}$.

5. 命题意图：本小题主要考查直线与平面间位置关系的判定与性质、平面的基本事实等基础知识；考查直观想象、逻辑推理等能力；考查化归与转化、特殊到一般等思想方法.

答案 B. 假设 F 为所在棱的中点，即可判断①③正确，②错误.

6. 命题意图：本小题主要考查算法初步基础知识以及数学文化；考查抽象概括能力和计算求解等能力；考查应用意识.

答案 C. 根据程序框图，输出 S 的值为 $S=1+2+\cdots+18=\frac{18\times19}{2}=171$.

7. 命题意图：本小题主要考查圆的标准方程等基础知识；考查推理论证、运算求解等能力；考查数形结合、化归与转化等思想方法.

答案 B. 因为圆 M 的半径为 2，所以当且仅当 M 到直线 l 的距离为 1 时，$|BC|=2\sqrt{3}$，又圆心 M 为$(-2,0)$，$|AM|=1$，故满足条件的直线有并且只有一条（即 $x=-1$）.

8. 命题意图：本小题主要考查函数图象和性质、导数等基本知识；考查数形结合思想.

答案 B. 由题，$f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数，排除 A；又 $f(1)=\frac{2}{e+e^{-1}}<1$，排除 C；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to0$，排除 D，故选 B.

9. 命题意图：本小题主要考查正弦定理，余弦定理，三角形内角和，三角函数定义等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，应用意识.

答案 D. 由 $\frac{\sqrt{3}c}{a\cos B}+\tan A+\tan B=0$ 及正弦定理有 $\frac{\sqrt{3}\sin C}{\sin A\cos B}+\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}=0$，即 $\frac{\sqrt{3}\sin C}{\sin A\cos B}=-\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B}=-\frac{\sin C}{\cos A\cos B}$，所以 $\tan A=-\sqrt{3}$，因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

10. 命题意图：本小题主要考查概率等基础知识；考查运算求解等数学能力；考查概率统计等数学思想.

答案 D. 记 5 个项目中，不会决出奖牌的冰壶、冰球项目分别为 A_1,A_2，能决出奖牌的 3 个比赛项目分别为 B_1,B_2,B_3. 从这 5 项目中随机选择 2 项的所有基本事件有：(A_1,A_2)，(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_1,B_3)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_2,B_3)，(B_1,B_2)，(B_1,B_3)，(B_2,B_3)，共 10 个. 其中所选择的 2 个比赛项目中最多只有 1 项会决出奖牌的基本事件有 7 个. 所以，所选择的 2 个比赛项目中最多只有 1 项会决出奖牌的概率为 $P=\frac{7}{10}$.

11. 命题意图：本小题主要考查双曲线的定义、双曲线的几何性质等基础知识；考查推理论证、运算求解等能力；考查数形结合、化归与转化等思想方法.

答案 B. 由已知，双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，焦点为 $F(2,0)$，所以 $(|MA|+|MF|)_{\min}=|AF|=\sqrt{(3-2)^2+5^2}=\sqrt{26}$.

12. 命题意图：本小题主要考查函数、导数以及不等式等知识的综合应用；考查抽象概括能力、运算求解能力以及和创新能力；考查化归与转化等数学思想.

答案 D. 由题 $a=0.02$，$b=\ln(1+\sin 0.02)$，$c=2\ln 1.02$. 易证 $x>0$ 时 $\ln x<x-1$，则 $b=\ln(1+\sin 0.02)<\sin 0.02<0.02=a$；又 $c-a=2\ln 1.02-0.02=2[\ln(1+0.02)-\frac{1}{2}\times 0.02]$，令 $h(x)=\ln x-\frac{1}{2}(x-1)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2-x}{2x}$，知 $1<x<2$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，则 $1<x<2$ 时 $h(x)>h(0)=0$，即 $1<x<2$ 时 $\ln x>\frac{1}{2}(x-1)$，则 $\ln(1+0.02)>\frac{1}{2}\times 0.02$，故 $c-a>0$，即 $c>a$，综上 a,b,c 的大小关系为 $b<a<c$.

二、填空题(20 分)

13. 命题意图：本小题主要考查平面向量的数量积，向量的减法，两个向量垂直的充要条件等基础知识；考查运算求解能力，应用意识.

解析：答案 1. 因为 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(1,2)\cdot(-2,2-t)=-2+4-2t=0$，解得 $t=1$.

14. 命题意图：本小题主要考查正弦型函数的性质，图象平移，奇偶性等基础知识；考查推理论证能力，应用意识.

解析：答案 $-\frac{\pi}{6}$. 由 $y=\sin(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 后所得函数为 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$，因其图象关于 y 轴对称，即函数为偶函数，所以 $-\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，故 $k=-1$，此时 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

15. 命题意图：本小题主要考查直线的斜率、直线与直线的位置关系、直线与抛物线的位置关系等基础知识；考查运算求解、推理论证等能力；考查数形结合、化归与转化等思想方法.

答案 $y^2=2x$. 由已知，直线 OM 的斜率为 1，则 AB 的斜率为 -1，所以 $m=-1$. 因为点 $M(1,1)$ 在直线 AB 上，所以 $p=1$. 所以，抛物线 C 的方程为 $y^2=2x$.

16. 命题意图：本小题主要考查面面垂直的性质、棱锥体积的计算和球面的性质等基础知识；考查直观想象、推理论证、运算求解、创新等能力；考查数形结合、化归与转化等思想方法.

答案 $\frac{\sqrt{21}}{3}$. 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{ABCD}\times h$，由于底面 $ABCD$ 是边长为 2

的正方形，其面积是一个定值，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积最大，等价于 h 取得最大值. 由已知，$\triangle PAB$ 为一个圆的内接三角形，且 $AB=2$. 所以，当且仅当$\triangle APB$ 为正三角形时，该四棱锥的体积最大. 此时，$h=\sqrt{3}$. 设正方形 $ABCD$ 的中心为 M，正三角形 PAB 的中心为 N，由题意，球心 O 为过 M 且垂直于平面 $ABCD$ 的直线与过 N 且垂直于平面 PAB 的直线的交点. 易知，$OM=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$AM=\sqrt{2}$，所以球半径等于 $\sqrt{OM^2+AM^2}=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

三、解答题(共 70 分)

(一)必考题

17. 命题意图：本小题主要考查回归方程、相关系数等基本知识；考查统计基本思想以及抽象概括、数据处理等能力和应用意识.

解析：(1)因为相关系数 $0<r_1<r_2$，所以模型② $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}\sqrt{x}$ 的拟合效果最好. ………… 3 分

(2)令 $t=\sqrt{x}$，知 y 与 t 可用线性方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}t$ 拟合，则

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{10}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{10}(t_i-\bar{t})^2}=\frac{49.16}{4.52}\approx 10.876,$$ …………………………………………… 5 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=72.65-10.876\times 2.25\approx 48.18$，…………………………………………… 7 分

所以，y 关于 t 的线性回归方程为 $\hat{y}=48.18+10.88t$，

故 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=48.18+10.88\sqrt{x}$. …………………………………………… 9 分

2025 年，即 $x=14$ 时，$\hat{y}=48.18+10.88\sqrt{14}\approx 48.18+10.88\times 3.742\approx 88.89$(亿元)，

此时，该县 2025 年乡村经济收入的估计值为 88.89 亿元. …………………………………… 12 分

18. 命题意图：本小题主要考查数列的概念，递推数列求前几项，判断等比数列，数列求通项公式，数列求和等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，应用意识.

解析：(1)由已知 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$，

所以 $a_2=\frac{1}{2}a_1+1=\frac{3}{2}$，$a_3=\frac{1}{2}a_2+1=\frac{7}{4}$，…………………………………………… 2 分

由 $b_n=a_n-2$，

所以 $b_1=1-2=-1$，$b_2=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$，$b_3=\frac{7}{4}-2=-\frac{1}{4}$. …………………………………… 4 分

(2)数列$\{b_n\}$是等比数列，理由如下：…………………………………………………… 5 分

因为$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}-2}{a_n-2}=\frac{\frac{1}{2}a_n+1-2}{a_n-2}=\frac{\frac{1}{2}(a_n-2)}{a_n-2}=\frac{1}{2}$. …………………………………… 7 分

又 $b_1=a_1-2=-1$，

所以数列$\{b_n\}$是首项为-1，公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列. ………………………………………………… 8 分

(3)由(2)知 $b_n=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，所以 $a_n=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$， ………………………………………… 9 分

所以 $S_n=(2-1)+\left(2-\dfrac{1}{2}\right)+\left(2-\dfrac{1}{2^2}\right)+\cdots+\left(2-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$

$=2n-\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$

$=2n-\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}$

$=2n-2+\dfrac{1}{2^{n-1}}$. ……………………………………………………………………………………… 12 分

19. 命题意图：本小题主要考查直线与平面垂直的性质与判定、平面与平面垂直的性质与判定、点到平面的距离等基础知识；考查直观想象、推理论证、运算求解能力；考查化归与转化等思想方法.

解析：(1)因为$\triangle ABC$是等边三角形，$MN/\!/BC$，

所以$\triangle AMN$也是等边三角形.

因为 O 是 MN 的中点，

所以，$PO\perp MN$. ………………………………………………………………………………………… 2 分

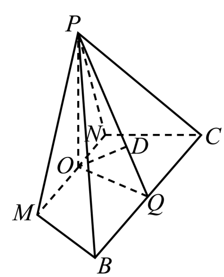
由已知，平面 $PMN\perp$平面 $MNCB$，

所以 $PO\perp$平面 $MNCB$. ………………………………………………………………………………… 4 分

因为 $BM\subset$平面 $MNCB$，

所以 $PO\perp BM$. ………………………………………………………………………………………… 5 分

(2)如图，取 BC 的中点 Q，连接 OQ、PQ.



由(1)可知，$PO\perp OQ$.

又由题意，$MN\perp PO$，$MN\perp OG$，

所以 $MN\perp$平面 OPQ.

因为 $BC/\!/MN$，则 $BC\perp$平面 OPQ.

于是平面 $OPQ\perp$平面 PBC.

过 O 作 PQ 的垂线，设垂足为 D，则 $OD\perp$平面 PBC

所以 OD 为点 O 到平面 PBC 的距离. ………………………………………………………………… 8 分

因为 $MN=4$，等边 $\triangle ABC$ 的边长为 6，

则 $\triangle AMN$（$\triangle PMN$）是边长为 4 的等边三角形.

所以 $PO=2\sqrt{3}$.

而 $OQ=\sqrt{3}$，则 $PQ=\sqrt{15}$，

所以 $OD=\dfrac{PO\cdot OQ}{PQ}=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$. ………………………………………………… 11 分

易知 $MN /\!/$ 平面 PBC，所以 M 到平面 PBC 的距离等于 O 到平面 PBC 的距离，

所以 M 到平面 PBC 的距离为 $h=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$. ………………………………………………… 12 分

注：本题还可以用体积相等的关系求出 M 到平面 PBC 的距离.

20. 命题意图：本小题主要考查直线的方程、椭圆标准方程、直线与椭圆的位置关系、基本不等式等基础知识；考查推理论证、运算求解能力及创新能力；考查化归与转化、数形结合、函数与方程等思想方法.

解析：(1) 依题意有 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $a=\sqrt{2}c$. ………………………………………………… 1 分

将 $\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 代入椭圆 C 的方程，得 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{2b^2}=1$. ………………………………………………… 2 分

因为 $a^2=b^2+c^2$，

由上可得：$a=\sqrt{2}$，$b=c=1$. ………………………………………………… 3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………………… 4 分

(2) ① 由题知，切线 l 斜率存在，设直线 l：$y=k(x-x_0)+y_0$，联立 $\begin{cases}x^2+2y^2=2,\\ y=kx+y_0-kx_0,\end{cases}$

消去 y，得 $(1+2k^2)x^2+4k(y_0-kx_0)x+2(y_0-kx_0)^2-2=0$，

由 $\Delta=16k^2(y_0-kx_0)^2-4(1+2k^2)(2(y_0-kx_0)^2-2)=0$，

即 $(x_0^2-2)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-1=0$，

此时 $\Delta'=4x_0^2y_0^2-4(x_0^2-2)(y_0^2-1)=4x_0^2+8y_0^2-8=0$，

则 $k=\dfrac{2x_0y_0}{2(x_0^2-2)}=\dfrac{2x_0y_0}{2(-2y_0^2)}=-\dfrac{x_0}{2y_0}$，

则直线 l 的方程为 $y=-\dfrac{x_0}{2y_0}(x-x_0)+y_0$，即 $\dfrac{x_0}{2}x+y_0y-1=0$. ………………………………… 7 分

另解：因为椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，

所以椭圆在第一象限内的一段对应的函数解析式为 $y=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}\ (0<x<\sqrt{2})$.

由题意,直线 l 为曲线 $y=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}\ (0<x<\sqrt{2})$ 在点 P 处的切线.

易知直线 l 的斜率为 $k=y'|_{x=x_0}=\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}\right)'|_{x=x_0}=-\frac{x_0}{2y_0}$, ………………………… 6 分

则直线 l 的方程为 $y-y_0=-\frac{x_0}{2y_0}(x-x_0)$,即 $\frac{x_0}{2}x+y_0y-1=0$. ………………………… 7 分

②令 $y=0$,有 $M\left(\frac{2}{x_0},0\right)$;令 $x=0$,有 $N\left(0,\frac{1}{y_0}\right)$. ………………………… 8 分

又 $\frac{x_0^{\ 2}}{2}+y_0^{\ 2}=1$,由上可得

$$S_{\triangle MON}=\frac{1}{2}|OM||ON|=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x_0}\cdot\frac{1}{y_0}=\frac{1}{x_0y_0}=\frac{\frac{x_0^{\ 2}}{2}+y_0}{x_0y_0}$$

$$=\frac{x_0}{2y_0}+\frac{y_0}{x_0}\geqslant 2\sqrt{\frac{x_0}{2y_0}\cdot\frac{y_0}{x_0}}=\sqrt{2}.$$ ………………………… 11 分

所以,$\triangle MON$ 面积的最小值为 $\sqrt{2}$(当且仅当 $\frac{x_0^{\ 2}}{2}=y_0^{\ 2}=\frac{1}{2}$ 时取得). ………………………… 12 分

21.命题意图:本小题主要考查函数极值、导数的几何意义、导数综合应用等基础知识,考查化归与转化等数学思想,考查推理论证能力、运算求解能力以及创新能力.

解析:(1)当 $a=\mathrm{e}$ 时,$f(x)=\mathrm{e}\ln x+\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}x+\mathrm{e}^2$,

所以 $f(1)=\mathrm{e}^2-\mathrm{e}$,

又因为 $f'(x)=\frac{\mathrm{e}}{x}+\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}$,其中 $x>0$,

则在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率 $k=f'(1)=0$,

所以,切线方程为 $y=\mathrm{e}^2-\mathrm{e}$. ………………………… 4 分

(2)解法 1:由题知 $f'(x)=\frac{a+x(\mathrm{e}^x-2\mathrm{e})}{x}$,其中 $x\geqslant 1$,

设 $g(x)=a+x(\mathrm{e}^x-2\mathrm{e})$,则 $g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}$,

可知 $g'(x)$ 为 $[1,+\infty)$ 上的增函数,则 $g'(x)\geqslant g'(1)=0$,

所以 $g(x)$ 为 $[1,+\infty)$ 增函数,则 $g(x)$ 的最小值 $g(x)_{\min}=g(1)=a-\mathrm{e}$. ………………………… 5 分

①当 $a-\mathrm{e}\geqslant 0$,即 $a\geqslant \mathrm{e}$ 时,$g(x)\geqslant 0$,即 $f'(x)\geqslant 0$,$f(x)$ 为增函数,

则 $f(x)\geqslant f(1)=a\mathrm{e}-\mathrm{e}>0$,

由于 a 为整数,可知 $a\geqslant 3$ 时 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立,符合题意. ………………………… 6 分

②当 $a=2$ 时，$f(x)=2\ln x+e^x-2ex+2e$，$g(x)=2+x(e^x-2e)$，

则 $g(x)$ 的最小值 $g(x)_{\min}=g(1)=2-e<0$，又 $g(2)=2+2(e^2-2e)>0$，

由于 $g(x)$ 为 $[1,+\infty)$ 的增函数，则存在 $x_0\in(1,2)$ 使得 $g(x_0)=0\left(即\ e^{x_0}=2e-\dfrac{2}{x_0}\right)$，

当 $1<x<x_0$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数；

当 $x>x_0$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，

则 $f(x)_{极小值}=f(x_0)=2\ln x_0+e^{x_0}-2ex_0+2e=2\left(\ln x_0-ex_0-\dfrac{1}{x_0}+2e\right)$，其中 $x_0\in(1,2)$，

令 $u(x)=\ln x-ex-\dfrac{1}{x}+2e(1<x<2)$，则 $u'(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-e=\dfrac{-ex^2+x+1}{x^2}$，

当 $1<x<2$ 时，$u'(x)<0$，$u(x)$ 在 $(1,2)$ 时单调递减，

则 $u(x)>u(2)=\ln 2-\dfrac{1}{2}>0$，即 $f(x)_{极小值}=f(x_0)>0$.

则 $a=2$ 也符合题意. …………………………………………………………………… 10 分

③当 $a\leqslant 1$ 时，$g(x)_{\min}=g(1)=a-e<0$，

由于 $g(x)$ 为 $(1,+\infty)$ 的增函数，

则存在实数 $m>1$，且 $x\in(1,m)$，使得 $g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 为减函数，

则当 $x\in(1,m)$ 时，$f(x)<f(1)=(a-1)e\leqslant 0$，

故 $a\leqslant 1$ 不符合题意，舍去.

综上所述，a 的最小值为 2. ……………………………………………………………… 12 分

解法 2：由于 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，

则 $f(1)\geqslant 0$，所以 $a\geqslant 1$. …………………………………………………………………… 6 分

①当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x+e^x-2ex+e$，则 $f'(x)=\dfrac{1+x(e^x-2e)}{x}$，

令 $g(x)=1+x(e^x-2e)$，则 $g'(x)=(x+1)e^x-2e$，

由 $g'(x)$ 为 $[1,+\infty)$ 的增函数得 $g'(x)\geqslant g'(1)=0$，

则 $g(x)$ 为区间 $[1,+\infty)$ 上的增函数，

则 $g(x)$ 的最小值 $g(x)_{\min}=g(1)=2-e<0$，

则存在实数 $t>1$，使得 $x\in(1,t)$，使得 $g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，

故 $f(x)$ 为 $(1,t)$ 上的减函数，

所以 $f(x)<f(1)=0$，

故 $a=1$ 不符合题意，舍去. ……………………………………………………………… 8 分

②当 $a=2$ 时，$f(x)=2\ln x+e^x-2ex+2e$，$g(x)=2+x(e^x-2e)$，

则 $g(x)$ 的最小值 $g(x)_{\min}=g(1)=2-e<0$，又 $g(2)=2+2(e^2-2e)>0$，

由于 $g(x)$ 为 $[1,+\infty)$ 的增函数，则存在 $x_0\in(1,2)$ 使得 $g(x_0)=0\left(\text{即 } e^{x_0}=2e-\dfrac{2}{x_0}\right)$，

当 $1<x<x_0$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数；

当 $x>x_0$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，

则 $f(x)_{\text{极小值}}=f(x_0)=2\ln x_0+e^{x_0}-2ex_0+2e=2(\ln x_0-ex_0-\dfrac{1}{x_0}+2e)$，其中 $x_0\in(1,2)$，

令 $u(x)=\ln x-ex-\dfrac{1}{x}+2e(1<x<2)$，则 $u'(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-e=\dfrac{-ex^2+x+1}{x^2}$，

当 $1<x<2$ 时，$u'(x)<0$，$u(x)$ 在 $(1,2)$ 时单调递减，

则 $u(x)>u(2)=\ln 2-\dfrac{1}{2}>0$，即 $f(x)_{\text{极小值}}=f(x_0)>0$.

则 $a=2$ 也符合题意.

综上所述，a 的最小值为 2. …………………………………………………………… 12 分

(二)选考题(10 分)

22. 命题意图：本小题主要考查直线与圆的极坐标方程、参数方程、直角坐标方程，直线与圆的位置关系等基础知识；考查推理论证、运算求解能力；考查化归与转化、数形结合、方程等思想方法.

解析：(1)由直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数)可知

直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha$； ………………………………………………………… 2 分

由 $\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，$\rho^2=x^2+y^2$，……………………………………………… 3 分

代入 $x^2+y^2+8y+7=0$ 中，

可得曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2+8\rho\sin\theta+7=0$. ……………………………………… 5 分

说明：写直线 l 的极坐标方程时，不必要求说明 ρ 可以取负，或加上 $\theta=\pi+\alpha$.

(2)联立直线 l 和曲线 C 的极坐标方程 $\begin{cases}\rho^2+8\rho\sin\theta+7=0,\\ \theta=\alpha,\end{cases}$ 整理，得

$\rho^2+8\rho\sin\alpha+7=0$.

上述关于 ρ 的一元二次方程有两个实根 ρ_1，ρ_2，

于是 $\rho_1+\rho_2=-8\sin\alpha$，$\rho_1\cdot\rho_2=7$. …………………………………………………… 7 分

由题意，可设 $|\rho_1|=|OM|$，$|\rho_2|=|ON|$.

因为 $||OM|-|ON||=2\sqrt{5}$，则 $|OM|^2+|ON|^2-2|OM||ON|=20$.

即$|\rho_1|^2+|\rho_2|^2-2|\rho_1\rho_2|=20$,又$\rho_1\rho_2>0$,则有$\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2=20$,

所以$(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2=64\sin^2\alpha-28=20$,

所以$\sin^2\alpha=\frac{3}{4}$,所以$\tan^2\alpha=3$.

故直线l的斜率为$\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}$. …………………………………………………… 10 分

23. 命题意图:本小题主要考查绝对值的函数的最值、不等式证明等知识,考查运算求解能力,推理论证能力,化归与转化思想.

解析:(1)当$x<-1$时,$f(x)=-3x>3$;当$-1\leqslant x\leqslant 2$时,$f(x)=x+4\geqslant 3$;当$x>2$时,$f(x)=3x>6$.则$f(x)$的最小值为3. ……………………………………………………… 2 分

由于存在$x_0\in\mathbf{R}$,使得$f(x_0)\leqslant 4-a^2$,

则只需$f(x)$的最小值3不大于$4-a^2$即可, ……………………………………………… 4 分

即有$3\leqslant 4-a^2$,解得$-1\leqslant a\leqslant 1$,

故a的取值范围是$[-1,1]$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可知$f(x)$的最小值为$M=3$,则$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=3$,

则$3(a+b+c)=\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)(a+b+c)=14+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{4a}{b}+\frac{4c}{b}+\frac{9a}{c}+\frac{9b}{c}$ …………… 6 分

$=14+\left(\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\right)+\left(\frac{4c}{b}+\frac{9b}{c}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{9a}{c}\right)$ ……………………………………………… 8 分

$=14+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}+2\sqrt{\frac{4c}{b}\cdot\frac{9b}{c}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{9a}{c}}$

$\geqslant 36$,

当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$,$\frac{4c}{b}=\frac{9b}{c}$,$\frac{c}{a}=\frac{9a}{c}$且$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=3$取"=",即$a=2$,$b=4$,$c=6$取"=".

所以$a+b+c\geqslant 12$. ……………………………………………………………………… 10 分