

乐山市高中 2022 届第三次调查研究考试

数 学(理工类)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A = \{x | (x+1)(x-2) \leq 0\}$, $B = [0, 3)$, 则 $A \cap B =$
 A. $(2, 3)$ B. $[0, 2]$ C. $[-1, 2]$ D. $[-1, 3)$
2. 已知复数 $z_1 = \frac{1}{i}$, $z_2 = \frac{2}{1-i}$, 则复平面内表示复数 $2z_1 + z_2$ 的点在
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. “ F 是抛物线 $y^2 = 12x$ 的焦点”是“ F 是双曲线 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的焦点”的
 A. 充分必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充分不必要条件 D. 既不是充分条件也不是必要条件
4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{9}(x+1)(2x^2 - 8x - 1)$, 曲线 $y = f(x)$ 以点 $A(-1, f(-1))$ 为切点的切线方程是
 A. $x - y - 1 = 0$ B. $x + y - 1 = 0$ C. $x + y + 1 = 0$ D. $x - y + 1 = 0$
5. $(m-x)^5$ 展开式中 x^3 的系数为 -20 , 则 $m^2 =$
 A. 2 B. 1 C. 3 D. $\sqrt{2}$
6. 四参数方程的拟合函数表达式为 $y = \frac{a-d}{1 + \left(\frac{x}{c}\right)^b} + d (x > 0)$, 常用于竞争系统和免疫检测, 它的
 图象是一个递增(或递减)的类似指数或对数曲线, 或双曲线(如 $y = x^{-1}$), 还可以是一条 S 形曲线. 当 $a=4, b=-1, c=1, d=1$ 时, 该拟合函数图象是
 A. 类似递增的双曲线 B. 类似递增的对数曲线
 C. 类似递减的指数曲线 D. 是一条 S 形曲线
7. 2021 年冬某地民兵预备役训练, 民兵射击成绩(单位: 环) $\xi \sim N(7.6, \sigma^2) (\sigma > 0)$, $P(7.2 < \xi \leq 8) = 0.68$. 如果 8940 名民兵的射击成绩中有 η 个在区间 $(7.6, 8]$ 上, 则
 A. $\eta \sim B(8940, 0.68)$ B. $\eta \sim B(8940, 0.34)$
 C. $\eta \sim N(7.6, \sigma^2)$ D. $\eta \sim N(7.6, 0.34)$

8. 三棱锥 $A-BCD$ 的四个顶点都在表面积为 16π 的球 O 上, 点 A 在平面 BCD 的射影是线段 BC 的中点, $AB=BC=2\sqrt{3}$, 则平面 BCD 被球 O 截得的截面面积为

- A. $2\sqrt{3}\pi$ B. 3π C. 4π D. $3\sqrt{3}\pi$

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \begin{cases} an^2 - \left(\frac{7}{8}a + \frac{17}{4}\right)n + \frac{17}{2}, & n \leq 2, \\ a^n, & n > 2 \end{cases}$, 若 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则实数 a

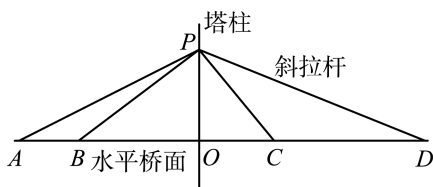
的取值范围是

- A. $(1.5, +\infty)$ B. $(1.8, +\infty)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(2.25, +\infty)$

10. 下列结论正确的是

- A. $\pi^2 > 2\ln \pi$ B. $\pi < e \ln \pi$ C. $e^2 \ln^2 \pi > 4\pi$ D. $\pi^e < e^2 \ln \pi$

11. 下左图是世界最高桥——贵州北盘江斜拉桥. 下右图是根据下左图作的简易侧视图(为便于计算, 侧视图与实物有区别). 在侧视图中, 斜拉杆 PA, PB, PC, PD 的一端 P 在垂直于水平面的塔柱上, 另一端 A, B, C, D 与塔柱上的点 O 都在桥面同一侧的水平直线上. 已知 $AB=8\text{ m}$, $BO=16\text{ m}$, $PO=12\text{ m}$, $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$. 根据物理学知识得 $\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) = 2\overrightarrow{PO}$, 则 $CD=$

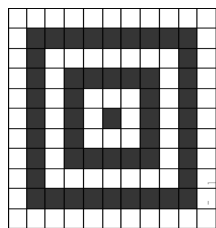


- A. 28 m B. 20 m C. 31 cm D. 22 m

12. 广场内有一椭圆形区域, 其边沿与椭圆 $\frac{9x^2}{200^2} + \frac{y^2}{50^2} = 1$ 完全重合(单位: m).

现拟在该椭圆区域内用黑白磁砖贴一个完整的正方形图案(如图), 每块黑白磁砖规格为 50×50 (单位: cm), 所贴磁砖最里面的黑色磁砖中心与椭圆中心重合, 磁砖边沿与椭圆的对称轴平行. 该椭圆区域需要的黑色磁砖块数最多是

- A. 12481 B. 12480
C. 12801 D. 12800



图例

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $a = (1, 2)$, $b = (2, k)$, $a \parallel b$, 则 $k =$ _____.

14. 若 x, y 满足 $\begin{cases} 2x - y + 2 \geq 0, \\ x + y - 2 \leq 0, \\ y \geq -2 \end{cases}$, 则 $2x + y$ 的最小值是 _____.

15. 已知函数 $f(x) = x \cos \alpha - a \cos \alpha + \sin \alpha$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0\right)$, $x = \pi$ 是 $f(x)$ 的零点, 则当 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 时, 不等式 $f(x) - \sin x \leq 0$ 的解集为 _____.

16. 已知 A 是抛物线 $C_1: y^2 = 4x$ 的准线上的点, B 是 x 轴上一点, O 为原点, 直线 AB 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 两渐近线分别交于不同两点 M, N . 若双曲线 C_2 的离心率为 2, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$, 则 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ 的取值范围为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生依据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (12 分)

将① $\sin^2 A + \sin B \sin C = \sin^2 B + \sin^2 C$, ② $2a \cos A = b \cos C + c \cos B$, ③ $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4} bc$ 之一填入空格中(只填番号), 并完成该题.

已知锐角 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , _____.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $f(x) = \cos x \sin \left(x + \frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{5\pi}{6}\right)$, $\cos(\alpha - A) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的值域.

18. (12 分)

新冠疫苗有三种类型: 腺病毒载体疫苗、灭活疫苗和重组蛋白亚单位疫苗. 腺病毒载体疫苗只需要接种一针即可产生抗体, 适合身体素质较好的青壮年, 需要短时间内完成接种的人群, 突发聚集性疫情的紧急预防. 灭活疫苗和重组蛋白亚单位疫苗安全性高, 适合老、幼、哺、孕及有慢性基础病患者和免疫缺陷人群. 灭活疫苗需要接种两次. 重组蛋白亚单位新冠疫苗需要完成全程三针接种, 接种第三针后, 它的有效保护作用为 90%, 人体产生的抗体数量提升 5—10 倍, 甚至更高(即接种疫苗第三针后, 有 90% 的人员出现这种抗疫效果). 以下是截止 2021 年 12 月 31 日在某县域内接种新冠疫苗人次(单位: 万人, 忽略县外人员在本县接种情况)统计表:

	腺病毒载体疫苗	灭活疫苗	重组蛋白亚单位疫苗
第一针	0.5	10	110
第二针	0	10	110
第三针	0	0	100

其中接种腺病毒载体疫苗的统计情况如下:

接种时间	接种原因	接种人次(单位: 人)
3 月	疫情突发	1500
6 月	高考考务	1000
7 月	抗洪救灾	2500

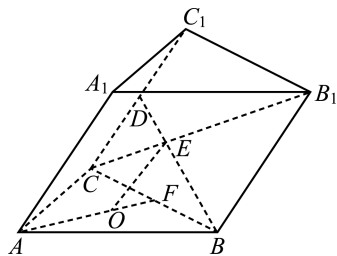
- (1) 遭遇 3 月疫情突发、服务 6 月高考考务、参加 7 月抗洪救灾的人都是不同的人. 在已接种腺病毒载体疫苗的人员中随机抽取一名, 求这个人参加了抗洪救灾的概率;
- (2) 在已接种灭活疫苗和重组蛋白亚单位疫苗的人员中, 用分层抽样的方法抽取 12 人, 其中接种重组蛋白亚单位疫苗的人员是根据人体产生的抗体数量是否至少提升 5—10 倍为依据分层抽样抽取的. 再从这 12 人随机抽取 3 人, 这 3 人中, 人体产生的抗体数量至少提升 5—10 倍的人数为 ξ , 求 ξ 的分布列和数学期望.

19. (12 分)

如图,已知在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=AC=6$, $AB \perp AC$, F 是线段 BC 的中点,点 O 在线段 AF 上, $AO=2\sqrt{2}$. D 是侧棱 CC_1 中点, $BD \cap CB_1 = E$.

(1)证明: $OE \parallel$ 平面 AA_1C_1C ;

(2)若 $AA_1=4$,点 A_1 在平面 ABC 内的射影为 O ,求直线 OE 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值.



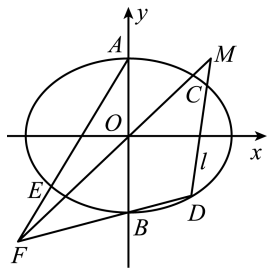
20. (12 分)

如图,椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 e ,点 $(1, e)$ 在 Γ 上.

A, B 是 Γ 的上、下顶点,直线 l 与 Γ 交于不同两点 C, D (两点的横坐标都不为零, l 不平行于 x 轴). 点 E 与 C 关于原点 O 对称,直线 AE 与 BD 交于点 F ,直线 FO 与 l 交于点 M .

(1)求 b 的值;

(2)求点 M 到 x 轴的距离.



21. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - x^e (x > 0)$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若存在正数 m ,使得对任意 $x \in (0, a] (a \in \mathbf{N}^*)$, $(m + 20x - x^2)x^e \leq e^7 x$ 恒成立,求 a 的最大值(参考结论: $15 \times 5^e > e^7$).

(二)选考题:共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题记分.

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

已知圆 C 的参数方程是 $\begin{cases} x = 5 + 2\cos\alpha, \\ y = \sqrt{3} + 2\sin\alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数})$. 以原点 O 为极点,以 x 轴正半轴为极轴

建立极坐标系,直线 l_1 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta - \sqrt{3} \rho \sin \theta = 3$,将直线 l_1 向左平移 3 个单位长度得到直线 l_2 .

(1)求圆 C 的极坐标方程和直线 l_2 的直角坐标方程;

(2)直线 l_2 与圆 C 交于点 A, B ,求优弧 $\widehat{AB}$ 和劣弧 $\widehat{AB}$ 长度的比值.

23. [选修 4-5:不等式选讲](10 分)

已知 $f(x) = |x - a| + 2x$,不等式 $f(x) \geq 5a$ 的解集为 $[2, +\infty)$.

(1)求实数 a 的值;

(2)若 $m > 0, n > 0$, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 2a$,求 $\frac{2m+1}{m+1} + \frac{2n+1}{n+1}$ 的最小值.