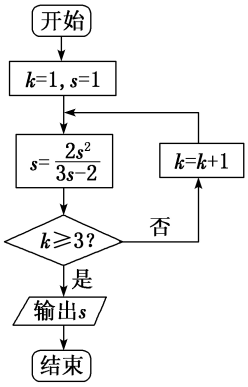
峨眉二中高2023届高二下5月考数 学 试 题（理）

一、选择题：（共12小题，每小题5分，共60分。每小题只有一个选项是正确的）

1.命题$\forall x\in R$，$x^2+x\geqslant 0$的否定是(　B　)

A．$\exists x_0\in R$，$x_0^2+x_0\leqslant 0$　　B．$\exists x_0\in R$，$x_0^2+x_0<0$

C．$\forall x\in R$，$x^2+x\leqslant 0$　　D．$\forall x\in R$，$x^2+x<0$



2. 若复数z满足$z(1-\mathrm{i})=1+3\mathrm{i}$，则$z=$(　A　)

A．$-1+2\mathrm{i}$　　B．$1+2\mathrm{i}$　　C．$-1-2\mathrm{i}$　　D．$1-2\mathrm{i}$

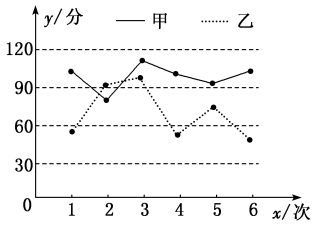
3．执行如图所示的程序框图，输出的s值为(　C　)

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

4.函数$f(x)=x\ln x$，则(　C)

A.在$(0，+\infty)$上递增　B.在$(0，+\infty)$上递减　C. 在$(0,\frac{1}{e})$上递减　D.在$(0,\frac{1}{e})$上递增

5.甲乙两名同学在高三的6次测试的成绩统计如图，甲乙两组数据的平均数分别为$\overline{x}_{甲}$，$\overline{x}_{乙}$，标准差分别为$\sigma_{甲}$，$\sigma_{乙}$，则(　D　)



A. $\overline{x}_{甲}<\overline{x}_{乙}$，$\sigma_{甲}<\sigma_{乙}$　　B. $\overline{x}_{甲}>\overline{x}_{乙}$，$\sigma_{甲}>\sigma$

C. $\overline{x}_{甲}<\overline{x}_{乙}$，$\sigma_{甲}>\sigma_{乙}$　　D. $\overline{x}_{甲}>\overline{x}_{乙}$，$\sigma_{甲}<\sigma_{乙}$.

6.已知函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$，且满足$f(x)=2xf'(1)+\ln x$，则$f'(1)=$(　B　)

A．$-e$　　B．-1　　C．1　　D．e

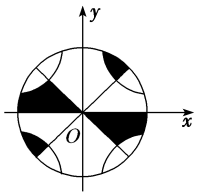
解：选B　由$f(x)=2xf'(1)+\ln x$，得$f'(x)=2f'(1)+\frac{1}{x}$.所以$f'(1)=2f'(1)+1$，则$f'(1)=-1$.

7．已知命题p：对任意的$x\in R$，总有$2^x>0$；q：“$x>1$”是“$x>2$”的充分不必要条件，则下列命题为真命题的是(　D　)

A．$p\wedge q$　　B．$(\neg p)\wedge(\neg q)$　　C．$(\neg p)\wedge q$　　D．$p\wedge(\neg q)$

解析：由指数函数的性质知命题p为真命题．易知$x>1$是$x>2$的必要不充分条件，所以命题q为假命题．由复合命题真值表可知$p\wedge(\neg q)$为真命题．

8. 如图所示，黑色部分和白色部分图形是由曲线$y=\frac{1}{x}$，$y=-\frac{1}{x}$，$y=x$，$y=-x$及圆构成的．在圆内随机取一点，则此点取自黑色部分的概率是(　A　)



A.$\frac{1}{4}$　　B.$\frac{1}{8}$　　C.$\frac{\pi}{4}$　　D.$\frac{\pi}{8}$

9．若函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{2}{3}$在区间$(a，a+5)$上存在最小值，则实数$a$的取值范围是(　D　)

A．$(-5,0)$　　B．$[-5,0)$　　C．$(-3,0)$　　D．$[-3,0)$

10. 已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+b^2x+1$，若$a$是从1，2，3三个数中任取的一个数，$b$是从0，1，2三个数中任取的一个数，则该函数有两个极值点的概率为(　A　)

A.$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C.$\frac{5}{9}$　　D．$\frac{7}{9}$

11．已知函数$f(x)=e^x-x^2$，若$\forall x\in[1，2]$，不等式$-m\leq f(x)\leq m^2-4$恒成立，则实数m的取值范围是(　C　)

A.$(-\infty，1-e]$　　B.$[1-e，e]$　　C.$[e，+\infty)$　　D.$[-e，e+1]$

解析：$f(x)=e^x-x^2$，所以$f'(x)=e^x-2x$，令$g(x)=f'(x)$，故$g'(x)=e^x-2$，因为$x\in[1，2]$，故$g'(x)=e^x-2>0$，故$f'(x)=e^x-2x$在$[1，2]$上是增，故$f'(x)=e^x-2x\geq e-2>0$；故$f(x)=e^x-x^2$在$[1，2]$上是增，故$e-1\leq e^x-x^2\leq e^2-4$；故$-m\leq f(x)\leq m^2-4$恒成立，化为$-m\leq e-1\leq e^2-4\leq m^2-4$故$m\geq e$.

12．已知函数$y=f(x)$对任意的$x\in(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})$满足$f'(x)\cos x+f(x)\sin x>0$（其中$f'(x)$是函数$f(x)$的导函数），则下列不等式成立的是(　B　)

A．$\sqrt{2}f(\frac{\pi}{3})<f(\frac{\pi}{4})$　　B．$\sqrt{2}f(-\frac{\pi}{3})<f(-\frac{\pi}{4})$　　C．$f(0)>2f(\frac{\pi}{3})$　　D．$f(0)>\sqrt{2}f(\frac{\pi}{4})$

【解答】解：构造函数$g(x)=\frac{f(x)}{\cos x}$，则$g'(x)=\frac{f'(x)\cos x-f(x)(\cos x)'}{cos^2x}=\frac{1}{cos^2x}(f'(x)\cos x+f(x)\sin x)$，

$\because$对任意的$x\in(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$满足$f'(x)\cos x+f(x)\sin x>0$，$\therefore g'(x)>0$，即函数$g(x)$在$x\in(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$单调递增，

则$g(-\frac{\pi}{3})<g(-\frac{\pi}{4})$，即$\frac{f(-\frac{\pi}{3})}{\cos(-\frac{\pi}{3})}<\frac{f(-\frac{\pi}{4})}{\cos(-\frac{\pi}{4})}$，$\therefore \frac{f(-\frac{\pi}{3})}{\frac{1}{2}}<\frac{f(-\frac{\pi}{4})}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，即$\sqrt{2}f(-\frac{\pi}{3})<f(-\frac{\pi}{4})$，故 B 正确.

二、填空题：（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。）

13．从 300 名学生(其中男生 180 人，女生 120 人)中按性别用分层抽样的方法抽取 50 人参加比赛，则应该抽取男生人数为_____人．　30

2	0 1 5
3	1 1 ■ 4
4	2 3 5 7 8

14. 在如图所示一组数据的茎叶图中，有一个数字被污染后模糊不清，但曾计算得该组数据的极差与中位数之和为 61，则被污染的数字为_____．2

15. 已知曲线$y=x+\ln x$在点$(1,1)$处的切线与曲线$y=ax^2+(a+2)x+1$相切,则 a=_____．8

解：由$y'=1+\frac{1}{x}$可得曲线$y=x+\ln x$在点$(1,1)$处的切线斜率为 2,故切线方程为$y=2x-1$,与$y=ax^2+(a+2)x+1$联立得$ax^2+ax+2=0$,显然$a\neq 0$,所以由 $\Delta=a^2-8a=0\Rightarrow a=8$.

16.已知函数 $f(x)$的定义域为 R，且 $f'(x)+f(x)=2xe^{-x}$，若 $f(0)=1$，则函数$\frac{f'(x)}{f(x)}$的取值范围为____[－2，0]

解：由 $f'(x)+f(x)=2xe^{-x}$，得 $e^xf'(x)+e^xf(x)=2x$，$\therefore [e^xf(x)]'=2x$，设 $e^xf(x)=x^2+c$，由于 $f(0)=1$，因而 $c=1$，

$\therefore f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$，$f'(x)=\frac{2xe^x-(x^2+1)e^x}{e^{2x}}=-\frac{(x-1)^2}{e^x}$，$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{(x-1)^2}{x^2+1}=-1+\frac{2x}{x^2+1}$,

当 $x=0$ 时，$\frac{f'(x)}{f(x)}=-1$，当 $x\neq 0$ 时$\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2}{x+\frac{1}{x}}\in[-1,0)\cup(0,1]$，当 $x=-1$ 时取得最小值，当 $x=1$ 时取得最大值，$\frac{f'(x)}{f(x)}$的取值范围为[－2，0]

三、简答题：（本题共 6 个大题，17 题 10 分，其余每题 12 分共 70 分，请写出详细的解题过程。）

17.（10 分）已知命题 p：(x+1)(x－3)<0，命题 q：2m<x<1－m.

(1)当 m=－1 时，p∨q 为真命题，求 x 的取值范围；

(2)若 q 是 p 的充分不必要条件，求实数 m 的取值范围。

解：（1）当 m=－1 时，p：$x\in(-1,3)$，q：$x\in(-2,2)$，……2 分

且 p∨q 为真命题，所以求其并集$x\in(-2,3)$……4 分

（2）q 是 p 的充分不必要条件，

由题知当 2m<x<1－m 解集为空集时合题意，所以$2m\geq 1-m$即$m\geq\frac{1}{3}$……6 分

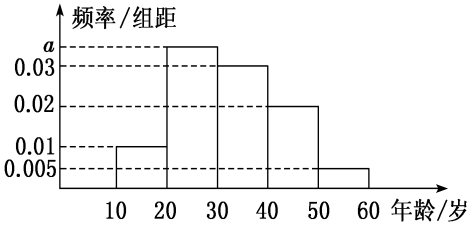
当 2m<x<1－m 解集不为空集时，即$2m<1-m$即$m<\frac{1}{3}$时，

此时应满足$(2m,1-m)\subseteq(-1,3)$……8 分

即$\begin{cases}1-m>2m\\2m\geq -1\\1-m\leq 3\end{cases}$ 得得 $-\frac{1}{2}\leq m\leq\frac{1}{3}$ ……9 分

综上$m\geq-\frac{1}{2}$ ……10 分

18.（12 分）某网站从春节期间参与收发网络红包的手机用户中随机抽取 10 000 名进行调查，将受访用户按年龄分成 5 组：[10,20)，[20,30)，…，[50,60]，并整理得到如图频率分布直方图.



(1)求 a 的值；

(2)从春节期间参与收发网络红包的手机用户中随机抽取一人，估计其年龄低于 40 岁的概率；

(3)估计春节期间参与收发网络红包的手机用户的平均年龄.

解：(1)根据频率分布直方图可知 10×(a＋0.005＋0.01＋0.02＋0.03)＝1，解得 a＝0.035. ……4 分

(2)根据题意，样本中年龄低于 40 岁的频率为：10×(0.01＋0.035＋0.03)＝0.75，所以从春节期间参与收发网络红包的手机用户中随机抽取一人，估计其年龄低于 40 岁的概率为 0.75. ……8 分

(3)根据题意，春节期间参与收发网络红包的手机用户的平均年龄估计为：

15×0.1＋25×0.35＋35×0.3＋45×0.2＋55×0.05＝32.5(岁). ……12 分

19.（12 分）已知函数 $f(x)=\ln x-ax$.

（1）若 $a=1$ 时，求曲线 $f(x)$ 在点 $x=e$ 处的切线方程；（2）若函数 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

解：（1）当 $a=1$ 时， $f(x)=\ln x-x,$ ， $f'(x)=\frac{1}{x}-1$ **.....2 分**

$f(e)=1-e, k=f'(e)=\frac{1}{e}-1$ **.....4 分**

$\therefore$ 切线方程为 $y-(1-e)=(\frac{1}{e}-1)(x-e)$ 即 $(\frac{1}{e}-1)x-y=0$ **.....6 分**

（2）令 $f(x)=0\Rightarrow\frac{\ln x}{x}=a(x>0)$ **.....7 分**

设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)\Rightarrow h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ **.....8 分**

$h'(x)>0\Rightarrow 0<x<e$

$h'(x)<0\Rightarrow x>e$ $\therefore h(x)$ 在（0，e）上单调递增，在（e, +∞）单调递减 **...9 分**

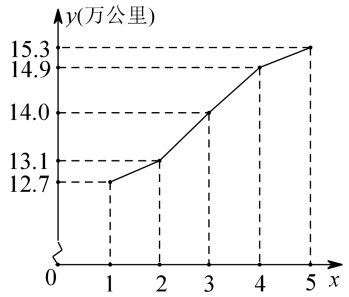
Q $h(e)=\frac{1}{e}, x\to 0$ 时 $y\to-\infty, x\to+\infty$ 时 $y\to 0$ **.....10 分**

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 有两个零点时，a 的取值范围为 $(0,\frac{1}{e})$ **.....12 分**

20.（12 分）铁路作为交通运输的重要组成部分，是国民经济的大动脉，在我国经济发展中发挥着重要的作用.截止 2021 年，中国铁路营业里程达到 15.3 万公里．下图是我国 2017～2021 年铁路营业里程折线图，其中 x 表示年份数与 2016 的差，y (单位：万公理)表示各年的营业里程数.

（1）由折线图易知 y 与 x 具有较强的线性关系，试用最小二乘法求 y 关 于 x 的回归直线方程，并预测 2022 年营业里程为多少万公里？

（2）从 2017～2021 年的五个营业里程数中随机抽取两个数，求所取得的两个数中，至少有一个超过 14 的概率.



附：回归直线的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}，\ \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}.$$

解（1）由已知得 $\overline{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$ **，.....1 分**

$\overline{y}=\frac{1}{5}(12.7+13.1+14.0+14.9+15.3)=14$ **，.....2 分**

$$\therefore\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\cdot\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\cdot\overline{x}^2}=\frac{1\times12.7+2\times13.1+3\times14+4\times14.9+5\times15.3-5\times3\times14}{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2-5\times3^2}=\frac{7}{10}=0.7$$

..... 4 分

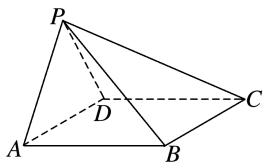
$\therefore\hat{a}=14-0.7\times3=11.9$ **，** $\therefore y=0.7x+11.9$ **，.....5 分**

$\therefore$ **2022 年的营业里程数为** $0.7\times6+11.9=16.1$ **（万公里）.....6 分**

（2）将 12.7,13.1,14.0,14.9,15.3 这五个数由小到大排列为 a,b,c,d,e **，其中** d,e **超过 14 万公里，从中任取两个数得：** $ab,ac,ad,ae,bc,bd,be,cd,ce,de.$ **，共 10 个.....8 分**

其中至少有一个超过 14 万公里的有 7 个，.....10 分

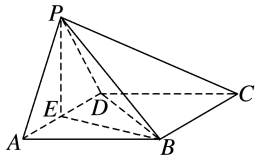
设至少有一个超过 14 万公里的事件为 A **，则** $P(A)=\frac{7}{10}$ **. .....12 分**



21.(12 分)18.在四棱锥 *P*－*ABCD* 中，底面 *ABCD* 为菱形，∠*BAD*＝60°，*PA*＝*PD*.

(1)证明：*BC*⊥*PB*；

(2)若 *PA*⊥*PD*，*PB*＝*AB*，求二面角 *A*－*PB*－*C* 的余弦值.



(1)证明 取 *AD* 中点为 *E*，连接 *PE*，*BE*，*BD*，

∵*PA* = *PD*，∴*PE*⊥*AD*，∵底面 *ABCD* 为菱形，且∠*BAD* = 60°，∴△*ABD* 为等边三角形，∴*BE*⊥*AD*，

∵*PE*∩*BE* = *E*，*PE*，*BE*⊂平面 *PBE*，∴*AD*⊥平面 *PBE*，又 *PB*⊂平面 *PBE*， ∴*AD*⊥*PB*

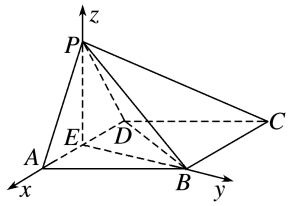
∵*AD*∥*BC*，∴*BC*⊥*PB*. .....5 分（缺少线线相交扣 1 分）

(2)解　设 $AB=2$，$\therefore AD=PB=2$，$BE=\sqrt{3}$，$\because PA\perp PD$，E 为 AD 中点，$\therefore PE=1$，$\because PE^2+BE^2=PB^2$，（没有证明建系扣 2 份）……7 分

$\therefore PE\perp BE$.以 E 为坐标原点，分别以 EA，EB，EP 所在直线为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,1)$，$C(-2,\sqrt{3},0)$，……8 分

$\therefore \overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AP}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{BP}=(0,-\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$.



设平面 PAB 的法向量为 $n=(x,y,z)$，则 $\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{AB}=0, \\ n\cdot\overrightarrow{AP}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x+\sqrt{3}y=0, \\ -x+z=0, \end{cases}$

令 $y=\sqrt{3}$，则 $n=(3,\sqrt{3},3)$. ……9 分

同理可得平面 PBC 的一个法向量 $m=(0,\sqrt{3},3)$. ……10 分

$\cos\langle m,n\rangle=\dfrac{m\cdot n}{|m||n|}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.设二面角 $A-PB-C$ 的平面角为θ，由图易知θ为钝角，

则 $\cos\theta=-\cos\langle m,n\rangle=-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.$\therefore$二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$……12 分(正值扣一分)

22.(12 分)设函数 $f(x)=\ln(x+a)+x^2$（1）若当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 取得极值，求 a 的值，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)$ 存在极值，求 a 的取值范围，并证明所有极值之和大于 $\ln\dfrac{e}{2}$.

解：（1）$f'(x)=\dfrac{1}{x+a}+2x$，依题意有 $f'(-1)=0$，故 $a=\dfrac{3}{2}$. ……1 分

从而 $f'(x)=\dfrac{2x^2+3x+1}{x+\frac{3}{2}}=\dfrac{(2x+1)(x+1)}{x+\frac{3}{2}}$. $f(x)$ 的定义域为 $\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$，……2 分

当 $-\dfrac{3}{2}<x<-1$ 时，$f'(x)>0$；当 $-1<x<-\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>-\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$.

从而，$f(x)$ 分别在区间 $\left(-\dfrac{3}{2},-1\right),\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 单调递增，在区间 $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right)$ 单调递减. ……4 分

（2）$f(x)$ 的定义域为 $(-a,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{2x^2+2ax+1}{x+a}$.

方程 $2x^2+2ax+1=0$ 的判别式 $\Delta=4a^2-8$. ……5 分

（ⅰ）若 $\Delta<0$，即 $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$，在 $f(x)$ 的定义域内 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 无极值. ……6 分

（ⅱ）若 $\Delta=0$，则 $a=\sqrt{2}$ 或 $a=-\sqrt{2}$. 若 $a=\sqrt{2}$，$x\in(-\sqrt{2},+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{(\sqrt{2}x-1)^2}{x+\sqrt{2}}$.

当 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f'(x)=0$，当 $x\in\left(-\sqrt{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 无极值.

若 $a=-\sqrt{2}$，$x\in(\sqrt{2},+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{(\sqrt{2}x-1)^2}{x-\sqrt{2}}>0$，$f(x)$ 也无极值. ……7 分

（ⅲ）若 $\Delta>0$，即 $a>\sqrt{2}$ 或 $a<-\sqrt{2}$，则 $2x^2+2ax+1=0$ 有两个不同的实根

$x_1=\dfrac{-a-\sqrt{a^2-2}}{2}$，$x_2=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-2}}{2}$.

当 $a<-\sqrt{2}$ 时，$x_1<-a$，$x_2<-a$，从而 $f'(x)$ 有 $f(x)$ 的定义域内没有零点，故 $f(x)$ 无极值. ……8 分

当 $a>\sqrt{2}$ 时，$x_1>-a$，$x_2>-a$，$f'(x)$ 在 $f(x)$ 的定义域内有两个不同的零点，

由根值判别方法知 $f(x)$ 在 $x=x_1$，$x=x_2$ 取得极值. ……9 分

综上，$f(x)$ 存在极值时，a 的取值范围为 $(\sqrt{2},+\infty)$.

有极值时满足 $x_1+x_2=-a,x_1x_2=\dfrac{1}{2},a^2>2$ ……10 分

$f(x)$ 的极值之和为 $f(x_1)+f(x_2)=\ln(x_1+a)+x_1^2+\ln(x_2+a)+x_2^2$ ……11 分

$=\ln[x_1x_2+a(x_1+x_2)+a^2]+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\ln\dfrac{1}{2}+a^2-1>1-\ln 2=\ln\dfrac{e}{2}$ ……12 分