

2023 届高三考试

数学试题参考答案(文科)

1. A 【解析】本题考查复数的运算与共轭复数,考查数学运算的核心素养.

$i^3 + i^4 = 1 - i$ 的共轭复数为 $1 + i$.

2. C 【解析】本题考查集合的交集,考查数学运算的核心素养.

若 $B = \{\text{偶数}\}$, 则 $A \cap B \neq \{2, 7\}$; 若 $B = \{2, 8, 9\}$, 则 $A \cap B \neq \{2, 7\}$; 若 $B = \{\text{质数}\}$, 则 $A \cap B = \{2, 7\}$; 若 $B = \{2, 7, 8, 9\}$, 则 $A \cap B \neq \{2, 7\}$.

3. D 【解析】本题考查统计,考查应用意识.

由图可知,猪肉、鸡蛋、鲜果、禽肉、粮食、食用油这 6 种食品中,粮食价格同比涨幅最小,所以 A 错误. $34.4\% < 5 \times 8.5\%$, 所以 B 错误. 去年 11 月鲜菜价格要比今年 11 月高,所以 C 错误.

因为 $\frac{1}{7} \times (-21.2\% + 7.6\% + 3\% + 8.5\% + 9.6\% + 10.4\% + 34.4\%) > \frac{1}{7} \times (-22\% + 7\% + 3\% + 8\% + 9\% + 10\% + 34\%) = \frac{1}{7} \times 49\% = 7\%$, 所以 D 正确.

4. A 【解析】本题考查抛物线的标准方程与性质,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

依题意可设 C 的标准方程为 $y^2 = -2px (p > 0)$, 因为 C 的焦点到准线的距离为 3, 所以 $p = 3$, 所以 C 的标准方程为 $y^2 = -6x$.

5. C 【解析】本题考查几何概型,考查直观想象的核心素养.

因为满足 $|PO| \leq 1$ 的点 P 位于圆心角为直角,半径为 1 的小扇形区域内,所以由间接法可得

$$\text{所求概率为 } 1 - \frac{\frac{1}{4}\pi \times 1^2}{\frac{1}{4}\pi \times 2^2} = \frac{3}{4}.$$

6. B 【解析】本题考查简单几何体的体积与三视图,考查空间想象能力与运算求解能力.

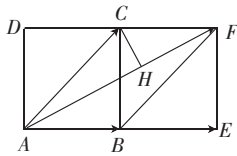
由三视图可知,该几何体由一个棱长为 2 的正方体和底面半径为 $\sqrt{2}$, 高为 2 的圆柱拼接而成,故该几何体的体积为 $2^3 + \pi \times (\sqrt{2})^2 \times 2 = 8 + 4\pi$.

7. C 【解析】本题考查等差数列的实际应用,考查应用意识与数学建模的核心素养.

设小方第 n 天存钱 a_n 元,则数列 $\{a_n\}$ 从第 4 项起成等差数列,且该等差数列的首项为 1,公差为 1,所以小方存钱 203 天的储蓄总额为 $1 + 1 + 1 + 200 \times 1 + \frac{200 \times 199}{2} \times 1 = 203 + 19900 = 20103$ 元.

8. A 【解析】本题考查向量的新概念与向量的加法,考查直观想象的核心素养.

过 C 作 $CH \perp AF$ 于 H . 设 $AB = 2$, 则 $AC = 2\sqrt{2}$, $CH = \frac{2}{\sqrt{5}}$, 所以 $AH =$



$\sqrt{AC^2 - CH^2} = \frac{6}{\sqrt{5}}$, 则 $\frac{AH}{AF} = \frac{\frac{6}{\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{5}$, 所以 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AF}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AF}$. 连接 BF ,

根据向量加法的平行四边形法则, 得 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF}$, 所以 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{AE}$.

9. A 【解析】本题考查程序框图与线性规划, 考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

作出不等式组 $\begin{cases} x+y \geq 0, \\ x-y \leq 0, \\ y \leq 1 \end{cases}$ 表示的可行域(图略), 由图可知, 当直线 $z = 3x + y$ 过点 $(1, 1)$ 时, z

取得最大值 4, 当直线 $z = 3x + y$ 过点 $(-1, 1)$ 时, z 取得最小值 -2.

因为 $4 < 5$, 且 $x, y \in \mathbf{R}$, 所以输出的 S 的最小值为 -2, 最大值为 5.

10. C 【解析】本题考查函数的实际应用, 考查应用意识与数学运算的核心素养.

$f(x) = \log_a[k(x+1)^2] = \log_a k + 2\log_a(x+1)$, 由 $f(2) = 2, f(8) = 3$, 得 $\log_a k + 2\log_a(2+1) = 2, \log_a k + 2\log_a(8+1) = 3$, 两式相减得 $\log_a 9 = 1$, 则 $a = 9$, 所以 $\log_a k + 2 = 3, k = 9$. 该住房装修完成后要达到安全入住的标准, 则 $0.48 - 0.1f(x) \leq 0.08$, 则 $f(x) \geq 4$, 即 $1 + 2\log_9(x+1) \geq 4$, 解得 $x \geq 26$, 故至少需要通风 26 周.

11. D 【解析】本题考查四棱锥的外接球, 考查空间想象能力与运算求解能力.

如图, 取 BC 的中点 E , 过 E 作 $ME \parallel AP$, 使得 $2ME = AP$, 连接 $AE, DE,$

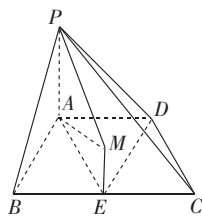
AM, PM . 在等腰梯形 $ABCD$ 中, 由 $BE = AB, \angle ABC = \frac{\pi}{3}$, 可得 $\triangle ABE$ 为

正三角形. 因为底面 $ABCD$ 是等腰梯形, 所以 $\triangle CDE$ 为正三角形, 所以 $BE = AE = DE = EC = m$, 所以 E 为梯形 $ABCD$ 外接圆的圆心. 由 $AP \perp$ 平

面 $ABCD$, 得 $ME \perp$ 平面 $ABCD$. 又 $2ME = AP$, 所以 M 到 A, B, C, D, P 的距离相等, 则 M

为球 O 的球心. 在 $\text{Rt}\triangle MAE$ 中, $AM = \sqrt{AE^2 + ME^2} = \sqrt{m^2 + (\frac{1}{2}m)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}m$, 所以球 O 的

表面积为 $4\pi \times (\frac{\sqrt{5}}{2}m)^2 = 5\pi m^2 = 125\pi$, 解得 $m = 5$.



12. A 【解析】本题考查导数的应用与导数的几何意义, 考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

由 $f'(x) = x^2 + x + c = 0$, 得 $x_1 + x_2 = -1, x_1 x_2 = c, \Delta = 1 - 4c > 0$, 可得 $c < \frac{1}{4}$. 因为 $f(x_1) =$

$x_2, f(x_2) = x_1$, 所以两式作差得 $\frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) + \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) + c(x_2 - x_1) = x_1 - x_2$, 则 $\frac{1}{3}(x_1^2 +$

$x_1 x_2 + x_2^2) + \frac{1}{2}(x_2 + x_1) + c = -1$, 所以 $\frac{1}{3}[(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2] + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + c = \frac{1}{3}(1 - c)$

$-\frac{1}{2} + c = -1$, 解得 $c = -\frac{5}{4}$.

13. $x = \frac{3\pi}{2}$ (答案不唯一, 只要对称轴方程满足 $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 即可) 【解析】本题考查三角

函数图象的对称性, 考查数学运算的核心素养.

令 $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$.

14. $\frac{\sqrt{29}}{3}$ 【解析】本题考查双曲线的定义与离心率,考查直观想象与数学运算的核心素养.

因为 $|PF_1| = 5, |PF_2| = 2, PF_1 \perp PF_2$, 所以 $2a = |PF_1| - |PF_2| = 3, 2c = |F_1F_2| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$, 故 $e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a} = \frac{\sqrt{29}}{3}$.

15. $2\sin 3; 0.1^{-0.2}$ 【解析】本题考查三角函数值与指数大小的比较,考查逻辑推理的核心素养. 因为 $1 < 4^{0.2} < 10^{0.2}, 0.1^{-0.2} = 10^{0.2} > 10^{0.15} > 1, 2\sin 3 \approx 2\sin 171.9^\circ < 2\sin 150^\circ = 1$, 所以最小的是 $2\sin 3$, 最大的是 $0.1^{-0.2}$.

16. $-\frac{(-4)^{n-1}}{2}$ (或 $\frac{(-4)^n}{8}$) 【解析】本题考查数列的综合,考查数学抽象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

因为 $b_n = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, a_n = \frac{2b_n + b_{n+1}}{3}$, 所以 $3a_n - 2b_n = 2b_n + b_{n+1} - a_n - a_{n+1}$, 整理得 $a_{n+1} - b_{n+1} = -4(a_n - b_n)$. 因为 $b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{3}{2}$, 所以 $a_1 - b_1 = -\frac{1}{2}$, 所以 $\{a_n - b_n\}$ 是首项为 $-\frac{1}{2}$, 公比为 -4 的等比数列, 所以 $a_n - b_n = -\frac{(-4)^{n-1}}{2}$.

17. 解: (1) 因为 $2\sin A + \tan A = 0$, 所以 $2\sin A + \frac{\sin A}{\cos A} = 0$ 1 分 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A > 0$, 所以 $2 + \frac{1}{\cos A} = 0$, 则 $\cos A = -\frac{1}{2}$ 3 分 因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{2\pi}{3}$ 4 分 (2) 由 $b\sin A = 4\sin B$ 及正弦定理, 得 $ab = 4b$, 5 分 所以 $a = 4$ 6 分 由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \geq 2bc + bc$, 8 分 所以 $bc \leq \frac{16}{3}$, 9 分 当且仅当 $b = c = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时, 等号成立, 10 分 所以 $1 \leq bc \leq \frac{16}{3}$. 因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A$, 所以 $\triangle ABC$ 面积的取值范围是 $[\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{4\sqrt{3}}{3}]$ 12 分

18. 解: (1) $\bar{x} = \frac{3+6+8+10+14+17+22+32}{8} = 14$, 1 分

$$\bar{y} = \frac{43+52+60+71+74+81+89+98}{8} = 71, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i y_i - 8\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{9138 - 8 \times 14 \times 71}{634} = \frac{1186}{634} \approx 1.871, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \approx 71 - 1.871 \times 14 \approx 44.81, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 1.87x + 44.81$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$(2) \text{ 由 } 1.87 \times \frac{X}{100} + 44.81 < 92.5, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{得 } \frac{X}{100} < \frac{47.69}{1.87} \approx 25.5. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

因为 $\frac{X}{100}$ 为整数, 所以 $\frac{X}{100}$ 的最大值为 25, 即 X 的最大值为 2500. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

【注】第(1)问中要求 $\hat{a}$ 精确到 0.01 的估计值, 不能将 $\hat{b}$ 精确到 0.01 的估计值 1.87 代入 $\hat{a} =$

$$\bar{y} - \hat{b}\bar{x} \text{ 求得, 如果这样写 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i y_i - 8\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{9138 - 8 \times 14 \times 71}{634} = \frac{1186}{634} \approx 1.87, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 71 - \frac{1186}{634} \times 14 \approx 44.81, \text{ 不扣分.}$$

$$19. \text{ 解: (1) 因为 } f'(x) = 2x - 1 - \frac{6}{x}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } f'(1) = -5, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, -a)$ 处的切线方程为 $y - (-a) = -5(x - 1)$,

$$\text{即 } y = -5x + 5 - a (\text{或 } 5x + y + a - 5 = 0). \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 令 } f(x) = 0, \text{ 得 } x^2 - x - 6\ln x = a. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

设函数 $g(x) = x^2 - x - 6\ln x (0 < x \leq 4)$,

$$\text{则 } g'(x) = 2x - 1 - \frac{6}{x} = \frac{2x^2 - x - 6}{x} = \frac{(2x + 3)(x - 2)}{x}.$$

$$\text{当 } 0 < x < 2 \text{ 时, } g'(x) < 0; \text{ 当 } 2 < x \leq 4 \text{ 时, } g'(x) > 0. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } g(x)_{\min} = g(2) = 2 - 6\ln 2. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$g(4) = 12 - 6\ln 4 = 12 - 12\ln 2, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$x \rightarrow 0, g(x) \rightarrow +\infty. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

当 $a < 2 - 6\ln 2$ 时, 方程 $a = g(x)$ 无解, 则 $f(x)$ 在 $(0, 4]$ 上零点的个数为 0; $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

当 $a = 2 - 6\ln 2$ 或 $a > 12 - 12\ln 2$ 时, 方程 $a = g(x)$ 只有一解, 则 $f(x)$ 在 $(0, 4]$ 上零点的个数为 1; $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

当 $2 - 6\ln 2 < a \leq 12 - 12\ln 2$ 时, 方程 $a = g(x)$ 有两解, 则 $f(x)$ 在 $(0, 4]$ 上零点的个数为 2.

$\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

$$20. (1) \text{ 证明: } \because \text{ 四边形 } ABCD \text{ 为矩形}, \therefore AD \perp AB. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\because AD \perp BP, AB \cap BP = B, \therefore AD \perp \text{ 平面 } PAB, \therefore AD \perp AP. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$\because AP \perp BD, BD \cap AD = D, \therefore AP \perp$ 平面 $ABCD$, 3 分

$\therefore AP \perp CE, \therefore$ 异面直线 CE 与 AP 所成角为定值, 且该定值为 90° 4 分

(2) 解: 如图, 在 AD 上取点 G , 使得 $FG \parallel AP$.

由 $\frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DP}$, 设 $AE = xAB, DF = xPD$, 其中 $0 < x < 1$.

由 $AB = AP = 1, BC = 2, AP \perp$ 平面 $ABCD$, 可得 $PD = \sqrt{AP^2 + AD^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, AE = x, DF = \sqrt{5}x, BE = 1 - x$.

..... 5 分

$\because FG \parallel AP, AP \perp$ 平面 $ABCD, \therefore FG \perp$ 平面 $ABCD$.

在 $\triangle APD$ 中, 有 $\frac{GF}{AP} = \frac{DF}{PD}$, 可得 $\frac{GF}{1} = \frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{5}}$, 可得 $GF = x$ 6 分

$\triangle BCE$ 的面积为 $\frac{1}{2} BE \cdot BC = \frac{1}{2} (1 - x) \times 2 = 1 - x$.

$$V_{C-BEF} = V_{F-BCE} = V(x) = \frac{1}{3} (1 - x)x = \frac{1}{3} \left[-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right],$$

可得当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 三棱锥 $C-BEF$ 体积的最大值为 $V\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$ 8 分

当三棱锥 $C-BEF$ 的体积取得最大值时, E 为 AB 的中点, F 为 DP 的中点.

延长 CE 交 DA 于点 M , 连接 MF , 交 PA 于点 N 9 分

$\because AE \parallel CD, \therefore \frac{AM}{MD} = \frac{AE}{CD} = \frac{1}{2}, \therefore AM = AD$ 10 分

$$\because FG \parallel AP, \therefore \frac{AN}{FG} = \frac{AM}{AG} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore AN = \frac{2}{3} FG = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} AP = \frac{1}{3} AP = \frac{1}{3}.$$

$$\text{又 } AE = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}, \therefore EN = \sqrt{AN^2 + AE^2} = \frac{\sqrt{13}}{6}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解: (1) 依题意可得 $a = 2$ 1 分

当直线 l 经过点 $D(-2, \sqrt{2})$ 时, l 的方程为 $x = -4\sqrt{2}y + 6$, 2 分

$$\text{代入 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ 整理得 } (8b^2 + 1)y^2 - 12\sqrt{2}b^2y + 8b^2 = 0, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\Delta = (-12\sqrt{2}b^2)^2 - 4(8b^2 + 1) \times 8b^2 = 32b^2(b^2 - 1) = 0, \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

解得 $b^2 = 1$, 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 5 分

(2) 依题意可得直线 l 的斜率不为 0, 可设 $l: x = my + 6, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} x = my + 6, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \text{ 得 } (m^2 + 4)y^2 + 12my + 32 = 0,$$

$$\text{则} \begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{12m}{m^2 + 4}, \\ y_1 y_2 = \frac{32}{m^2 + 4}, \end{cases} \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } k_{BP}k_{BQ} &= \frac{y_1 y_2}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} = \frac{y_1 y_2}{(my_1 + 4)(my_2 + 4)} = \frac{y_1 y_2}{m^2 y_1 y_2 + 4m(y_1 + y_2) + 16} \\ &= \frac{\frac{32}{m^2 + 4}}{\frac{32m^2}{m^2 + 4} - \frac{48m^2}{m^2 + 4} + 16} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 8 \text{分} \end{aligned}$$

$$\text{因为 } k_{AP}k_{BP} = \frac{y_1}{x_1 + 2} \cdot \frac{y_1}{x_1 - 2} = \frac{1 - x_1^2}{x_1^2 - 4} = -\frac{1}{4}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\text{所以 } k_{AP} = -\frac{1}{2}k_{BQ}. \text{ 又因为 } k_{AP} + k_{BQ} = -\frac{1}{2}, \text{ 所以 } k_{BQ} = -1, \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$\text{则直线 } BQ \text{ 的方程为 } y = -x + 2, \text{ 与 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \text{ 联立得 } Q(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}), \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

$$\text{所以 } l \text{ 的方程为 } y = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{6}{5} - 6}(x - 6), \text{ 即 } y = -\frac{1}{6}x + 1. \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

$$22. \text{解: (1) 对于曲线 } M \text{ 的参数方程, 令 } t - 2 = 0, \text{ 得 } t = 2, \\ \text{则 } t^3 + t = 10, \text{ 所以 } A(10, 0). \dots\dots\dots 1 \text{分}$$

$$\text{对于曲线 } N \text{ 的参数方程, 令 } t - \sqrt{t} = 0, \text{ 得 } t = 0 \text{ 或 } 1, \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\text{则 } t + \sqrt{t} = 0 \text{ 或 } 2, \text{ 所以 } B(0, 0), C(0, 2). \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

$$\text{故 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \times (2 - 0) \times 10 = 10. \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$(2) \text{对于曲线 } M \text{ 的参数方程, 由 } y = t - 2, \text{ 得 } t = y + 2, \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

$$\text{代入 } x = t^3 + t, \text{ 得 } x = (y + 2)^3 + y + 2, \text{ 则曲线 } M \text{ 的普通方程为 } x = (y + 2)^3 + y + 2. \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$\text{设线段 } PC \text{ 的中点为 } Q(x, y), P(x', y'), \text{ 则 } \begin{cases} x = \frac{x'}{2}, \\ y = \frac{y' + 2}{2}, \end{cases} \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x' = 2x, \\ y' = 2y - 2. \end{cases} \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\text{因为 } P(x', y') \text{ 在曲线 } M \text{ 上, 所以 } x' = (y' + 2)^3 + y' + 2,$$

$$\text{所以 } 2x = (2y - 2 + 2)^3 + 2y - 2 + 2, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\text{整理得 } x = 4y^3 + y, \text{ 所以线段 } PC \text{ 中点的轨迹方程为 } x = 4y^3 + y. \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$23. \text{解: (1) 当 } a = 0 \text{ 时, } f(x) \leq 2|x - 4| \text{ 可化为 } 2|x| \leq |x - 4|, \dots\dots\dots 1 \text{分}$$

$$\text{不等式两边平方, 得 } 4x^2 \leq (x - 4)^2, \text{ 整理得 } 3x^2 + 8x - 16 \leq 0, \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

解得 $-4 \leq x \leq \frac{4}{3}$. 故当 $a=0$ 时, 不等式 $f(x) \leq 2|x-4|$ 的解集为 $[-4, \frac{4}{3}]$ 5 分

(2)(解法一) 当 $a=1$ 时, 由绝对值不等式得 $f(x) = |x| + |x-1| + |x-4| \geq |x| + |x-4| \geq |x-(x-4)| = 4$ 7 分

由 $f(1)=4$, 得 $f(x)$ 的最小值为 4. 8 分

因为 $f(x) > m^2$, 所以 $m^2 < 4$, 解得 $-2 < m < 2$.

故 m 的取值范围为 $(-2, 2)$ 10 分

(解法二) 当 $a=1$ 时, $f(x) = |x| + |x-1| + |x-4| = \begin{cases} 5-3x, & x < 0, \\ 5-x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x+3, & 1 < x \leq 4, \\ 3x-5, & x > 4. \end{cases}$ 7 分

当 $x < 0$ 时, $f(x) > 5$; 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $4 \leq f(x) \leq 5$;

当 $1 < x \leq 4$ 时, $4 < f(x) \leq 7$; 当 $x > 4$ 时, $f(x) > 7$.

故 $f(x)$ 的最小值为 4. 9 分

因为 $f(x) > m^2$, 所以 $m^2 < 4$, 解得 $-2 < m < 2$.

故 m 的取值范围为 $(-2, 2)$ 10 分