理科数学参考解答及评分参考

一、选择题

1. 答案:A

解析:$z=\frac{2+\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}=\frac{2+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=\frac{-2\mathrm{i}+1}{2}=\frac{1}{2}-\mathrm{i}$.

命题意图:本小题设置课程学习情境,设计基础性问题,主要考查复数的乘法与除法运算等基础知识;考查运算求解能力.

2. 答案:C

解析:由$\frac{x+3}{x-2}\leqslant 0$解得$-3\leqslant x<2$,所以$A=\{x\mid -3\leqslant x<2\}$,$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x\mid -3\leqslant x<2\}\cap\{x\mid x\leqslant 1\}=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 1\}$.

命题意图:本小题设置课程学习情境,设计基础性问题,主要考查集合的补集与交集运算等基础知识;考查运算求解能力,应用意识.

3. 答案:C

解析:该农作物苗高度在$[16,18)$,$[18,20]$的频率分别为0.4,0.2,则“优质苗”株数为$100\times(0.4+0.2)=60$(株).

命题意图:本小题以乡村振兴、农业生产为命题情境,以直方图为载体考查概率统计问题,考查概率统计思想和应用意识.

4. 答案:A

解析:由题可知,该乐音对应的函数为奇函数,A,B选项中的函数为奇函数,选项C中的函数为非奇非偶函数;D选项中的函数为偶函数,排除C,D.对于选项B,当$x=\frac{\pi}{6}$时,$y=\frac{2-3\sqrt{3}}{12}<0$,不符合题意,故选A.

命题意图:本小题以音乐与数学为应用型情境,以函数图象为载体,考查函数图象的应用,考查数形结合思想;考查直观想象素养.

5. 答案:D

解析:由$\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha=1$有$1-2\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha=1$,因为$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以$0<\sin\alpha<1$且$\sin\alpha=2\cos\alpha$,代入$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$解得$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

命题意图:本小题设置课程学习情境,设计基础性问题,主要考查二倍角与同角三角函数关系等基础知识;考查运算求解能力,逻辑推理能力,应用意识.

6. 答案：A

解析：四棱台的下底面为边长是 4 的正方形，上底面为边长是 2 的正方形，高为$\sqrt{3}$，故四棱台的体积 $V=\frac{1}{3}(S_{上}+\sqrt{S_{上}S_{下}}+S_{下})h=\frac{1}{3}(4+8+16)\sqrt{3}=\frac{28\sqrt{3}}{3}$.

命题意图：本小题设置课程学习情境，设计基础性问题，主要考查四棱台的直观图与三视图的转化、棱台的体积等基础知识，考查空间想象能力，数学运算核心素养.

7. 答案：D

解析：因 $\log_2 a<\log_2 b<0$，则 $0<a<b<1$，于是有$\sqrt{a}<\sqrt{b}$，则 A 选项不正确；对于 B，可知 $0<2a<2b<2<\pi$，则 $y=\sin 2x$ 在区间$(0,1)$上没有单调性，则不一定有 $\sin 2a<\sin 2b$，B 选项不正确；由 $0<a<b<1$ 得 $\ln a<\ln b<0$，则有$\frac{1}{\log_a \mathrm{e}}<\frac{1}{\log_b \mathrm{e}}<0$，故 $\log_a \mathrm{e}>\log_b \mathrm{e}$，C 选项不正确；由 $0<a<b<1$，知函数 $y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，函数 $y=x^a$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，则 $a^b<a^a<b^a$，D 选项正确.

命题意图：本小题以指数式与对数式为知识探索情境，以指数式、对数式大小比较为载体，考查函数性质综合应用，考查化归与转化、数形结合思想；考查抽象概括、推理论证能力；考查逻辑推理、直观想象素养.

8. 答案：C

解析：由已知，$B_1H\perp$面 $ABCD$，$BH=1$，在 $\mathrm{Rt}\triangle BB_1H$ 中，$B_1H=\sqrt{BB_1^2-BH^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{7}$. 过 C_1 作直线 BC 的垂线，垂足为 E，则 $BE=3$，$C_1E=B_1H$，在 $\mathrm{Rt}\triangle BC_1E$ 中，$BC_1=\sqrt{C_1E^2+BE^2}=\sqrt{(\sqrt{7})^2+3^2}=4$. 由于 $AD_1\parallel BC_1$，故直线 AD_1 与平面 $ABCD$ 所成角等于直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成角，即$\angle C_1BE$，显然 $\sin\angle C_1BE=\frac{C_1E}{BC_1}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

命题意图：本小题设置课程学习情境，设计综合性问题，以斜四棱柱为载体，考查直线与平面的位置关系及线面所成的角，主要考查空间想象能力和数学运算、逻辑推理素养.

9. 答案：B

解析：$f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2$ 是 $f(x)$的最小值，故①正确；$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$上单调递减，在$\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，故②错误；将函数 $y=2\sin x$ 的图象上的所有点向左平移 $\frac{11\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $y=2\sin\left(x+\frac{11\pi}{6}\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象，即函数 $y=f(x)$的图象，故③正确. 综上，所有正确结论的序号是①③.

命题意图：本小题设置课程学习情境，设计综合性问题，考查两角和差的三角函数公式，三角函

数的最值问题，单调性，图象的平移变换，诱导公式等基础知识；考查运算求解能力，化归与转换思想，数形结合思想，应用意识.

10. 答案：C

解析：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases} y=k(x+2), \\ y^2=4x \end{cases}$ 得 $k^2x^2+(4k^2-4)x+4k^2=0$. 由 $\Delta>0$ 得 $k^2<\frac{1}{2}$，此时 $x_1+x_2=\frac{4}{k^2}-4$，$x_1x_2=4$，从而 $y_1y_2=4\sqrt{x_1x_2}=8$. 由 $\angle ADB=90°$ 得 $k_{DA}\cdot k_{DB}=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{8}{8-2(x_1+x_2)}=-1$，于是 $x_1+x_2=8$，解得 $k^2=\frac{1}{3}$，$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{16(1-2k^2)}}{k^2}=8$.

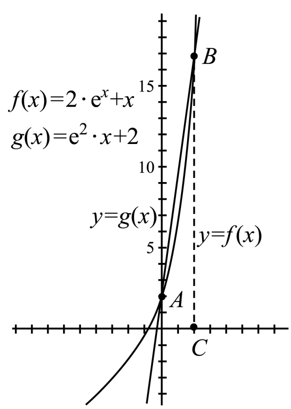
命题意图：本小题设置课程学习情境，设计综合性问题，主要考查直线、圆及抛物线的方程，直线与抛物线的关系等基础知识，考查数形结合、化归与转化思想，考查逻辑推理、数学运算核心素养.

11. 答案：B

解析：由 $AB=2$，$AP=\sqrt{6}$. 取 BD 的中点为 M，则 $AM=PM=\sqrt{3}$，$AM^2+PM^2=AP^2$，故 $PM\perp AM$. 又因为 $PM\perp BD$，故 $PM\perp$ 面 ABD. 设三棱锥 $P-ABD$ 的外接球球心为 O，半径为 R，$\triangle ABD$ 的外接圆圆心为 O_1，则 $OO_1\perp$ 面 ABD，故 $PM/\!/OO_1$. 连接 OP，则在直角梯形 OO_1MP 中，$O_1M=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$PM=\sqrt{3}$，$OD=R$，$R^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+(\sqrt{3}-OO_1)^2$. 又因为 $R^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+OO_1^2$，所以 $OO_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$R=\frac{\sqrt{15}}{3}$. 故三棱锥 $P-ABD$ 的外接球表面积为 $4\pi R^2=\frac{20\pi}{3}$.

命题意图：本小题设置课程学习情境，设计综合性问题，主要考查几何图形的旋转、三棱锥的外接球及球的表面积等基础知识，考查空间想象能力，考查逻辑推理、数学运算等核心素养.

12. 答案：D



解析：由于 $\frac{2a}{e^{x_0}}=2e^{\ln a-x_0}$，则原不等式等价于 $e^2\ln a-\ln a\geqslant 2e^{\ln a-x_0}+e^2x_0-x_0-2$，则有 $e^2(\ln a-x_0)+2\geqslant 2e^{\ln a-x_0}+\ln a-x_0$，令 $\ln a-x_0=t$，则原不等式化为 $e^2t+2\geqslant 2e^t+t$，令 $f(t)=2e^t+t$，$g(t)=e^2t+2$，因为 $g(0)=f(0)=2$，$g(2)=f(2)=2e^2+2$，如图可知，当 $f(t)\leqslant g(t)$ 时，则有 $t\in[0,2]$，则有 $0\leqslant\ln a-x_0\leqslant 2$，所以 $x_0\leqslant\ln a\leqslant x_0+2$，由已知，存在 $x_0\in[-1,2]$，使得不等式成立，则 $-1\leqslant\ln a\leqslant 4$，解得 $\frac{1}{e}\leqslant a\leqslant e^4$.

命题意图：本小题是由包含指数、对数式的不等式等构成的知识探索情境，以存在性问题为载体，主要考查函数性质、不等式以及导数综合应用等知识；考查推理论证、运算求解等数学能力；考查函数与方程、化归与转化、数形结合等数学思想；考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等素养.

二、填空题

13. 答案：2

解析：由$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(2,t)-(1,2)=(1,t-2)$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{1^2+(t-2)^2}=1$，解得 $t=2$.

命题意图：本小题设置课程学习情境，设计基础性问题，主要考查向量的减法与向量的模等基础知识；考查运算求解能力，方程思想.

14. 答案：$\frac{1}{2}$

解析：$(x+a)(x-2)^5$ 展开式中含 x^3 项为 $x\cdot C_5^3x^2(-2)^3+a\cdot C_5^2x^3(-2)^2$，由 $-8C_5^3+4a\cdot C_5^2=-60$，解得 $a=\frac{1}{2}$.

命题意图：本小题是以二项式定理为情景设置的系数探索问题，主要考查二项式定理及其应用等基础知识，考查运算求解等数学能力.

15. 答案：$\sqrt{10}$

解析：因为 $2|OA|=|OB|$，所以 $2x_A=-x_B$，设 $A(m,m+2)$，则 $B(-2m,-2m+2)$，因为 $k_{OA}+k_{OB}=0$，所以$\frac{m+2}{m}+\frac{-2m+2}{-2m}=0$，即 $m=-\frac{1}{2}$，即 $B(1,3)$，所以$\frac{b}{a}=3$，$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{10}$.

命题意图：本小题设置课程学习情境，设计综合性问题，主要考查双曲线的方程和离心率、直线与双曲线的关系等基础知识，考查数形结合、化归与转化思想，考查逻辑推理、数学运算核心素养.

16. 答案：$3\sqrt{3}$

解析：由已知根据正弦定理得 $2\sin A\cos B=\sin B\cos C+\sin C\cos B$，即 $2\sin A\cos B=\sin A$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$，由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，所以 $a=2\sin A$，$c=2\sin C=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)$，其中 $0<A<\frac{2\pi}{3}$，故 $a+b+c=\sqrt{3}+2\sin A+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\sqrt{3}+3\sin A+\sqrt{3}\cos A=\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$，因为 $0<A<\frac{2\pi}{3}$，所以当 $A=\frac{\pi}{3}$时，$\triangle ABC$ 的周长取得最大值 $3\sqrt{3}$.

命题意图：本小题设置课程学习情境，设计综合性问题，主要考查正(余)弦定理，两角和差的三角函数，三角函数求最值等基础知识；考查运算求解能力，化归与转化思想，函数思想，应用意识.

三、解答题

17. 解析：(1)由题，

得 $K^2=\dfrac{200\times(20\times50-30\times100)^2}{50\times150\times120\times80}=\dfrac{100}{9}\approx11.11>6.635$，…………………………… 2 分

因此，有 99% 的把握认为客户对该产品的评价结果与性别有关系. ………………………… 4 分

(2)顾客甲若想采用方案二的方式购买一件产品，设可能支付的金额为 X，X 的值可能为 180，220. …………………………………………………………………………… 5 分

由题 $P(X=180)=\dfrac{4}{10}=0.4$；$P(X=220)=\dfrac{6}{10}=0.6$， ……………………………………… 7 分

则 $E(X)=180\times0.4+220\times0.6=204$(元)，

顾客甲若采用方案二的方式购买一件产品，需支付金额的估计值为 204(元). ………… 9 分

顾客甲若采用方案一的方式购买一件产品，需支付金额为 $260\times0.8=208$(元). ……… 11 分

所以，该顾客采用方案二的方式购买较为合理. ………………………………………… 12 分

命题意图：本小题考查统计案例、卡方分布、离散型随机变量分布列等基础知识；考查统计与概率思想；考查运算求解、数据处理以及应用意识.

18. 解析：(1)由已知 $a_1+a_1+4=a_1+6$，所以 $a_1=2$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n$. ………………………………………………… 2 分

设等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，由 $b_1=3$，$b_3-b_2=18$

则 $3q^2-3q=18$，即 $q^2-q-6=0$，

解得 $q=3$，$q=-2$(舍去)，

所以数列$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=3^n$. ……………………………………………… 5 分

(2)由(1)得 $c_n=2n\cdot3^n$，

所以 $T_n=2\times3+4\times3^2+6\times3^3+\cdots+2n\cdot3^n$ ① ……………………………… 7 分

$3T_n=2\times3^2+4\times3^3+6\times3^4+\cdots+2(n-1)3^n+2n\cdot3^{n+1}$ ② …………………… 8 分

①－②得 $-2T_n=2\times3+2\times3^2+2\times3^3+\cdots+2\times3^n-2n\cdot3^{n+1}$，

所以 $-T_n=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n\cdot3^{n+1}=\dfrac{3(1-3^n)}{1-3}-n\cdot3^{n+1}$， ………………… 10 分

即 $-T_n=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3^{n+1}}{2}-n\cdot3^{n+1}$，

所以 $T_n=\dfrac{3}{2}+\dfrac{2n-1}{2}\cdot3^{n+1}$. …………………………………………………… 12 分

命题意图：本小题设置课程学习情境，设计综合性问题，主要考查等差数列和等比数列的通项公式，错位相减法求差比数列之和与等比数列求和等基础知识；考查运算求解能力，化归与转化思想，方程思想，推理论证能力，应用意识.

19. 解析：(1)证明：设 $PN\perp$ 平面 ABC 于点 N，

过 N 作 $NE\perp AB$ 于 E，$NF\perp AC$ 于 F，连接 PE，PF.

因为 $PN\perp$ 平面 ABC，$AB\subset$ 平面 ABC，所以 $PN\perp AB$.

又因为 $NE\perp AB$，所以 $AB\perp$ 平面 PNE，所以 $AB\perp PE$，同理 $AC\perp PF$. ……………… 2 分

在 Rt$\triangle PAE$，Rt$\triangle PAF$ 中，$\angle PAE=\angle PAF$，$PA=PA$，

故 $\triangle PAE\cong\triangle PAF$，所以 $AF=AE$.

在 Rt$\triangle ANE$，Rt$\triangle ANF$ 中，$AF=AE$，$AN=AN$，

故 $\triangle ANE\cong\triangle ANF$，所以 $NE=NF$. ………………………………………………… 4 分

即 N 到 AB，AC 的距离相等，同理 N 到 BC，AC 的距离相等，

故 N 为 $\triangle ABC$ 的内心，N 与 H 重合.

所以 $PH\perp$ 平面 ABC.

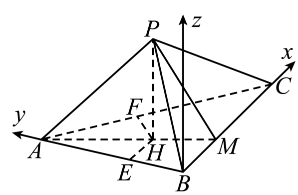
又因为 $PH\subset$ 平面 APM，所以平面 $PAM\perp$ 平面 ABC. ………………………………… 6 分

(2)由于 $AB\perp BC$，故可以以 B 为坐标原点，BC 为 x 轴，BA 为 y 轴建立如图所示空间直角坐标系，则 $B(0,0,0)$，$C(4,0,0)$，$A(0,3,0)$. ………………………………………………… 7 分

设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times4\times3=\frac{1}{2}r(3+4+5)$，故 $r=1$.

所以 $H(1,1,0)$，$AH=\sqrt{r^2+AE^2}=\sqrt{5}$，$PH=\sqrt{AP^2-AH^2}=2$，故 $P(1,1,2)$.

所以 $\overrightarrow{HP}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{HA}=(-1,2,0)$，



设平面 AHP 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{HP}=2z_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{HA}=-x_1+2y_1=0.\end{cases}$ 令 $y_1=1$，

故平面 AHP 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(2,1,0)$. ………………………………………………… 9 分

同理 $\overrightarrow{AP}=(1,-2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(4,-3,0)$，

设平面 ACP 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AP}=x_2-2y_2+2z_2=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AC}=4x_2-3y_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=6$，

故平面 ACP 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(6,8,5)$. ………………………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{4}{5}$，

故二面角 $M-PA-C$ 的余弦值为 $\frac{4}{5}$. ………………………………………………………… 12 分

命题意图:本小题设置课程学习情境,设计综合性问题,主要考查空间线面位置关系、平面与平面的位置关系、二面角等基础知识,考查空间想象能力、化归与转化思想,考查逻辑推理、数学运算等核心素养.

20. 解析:(1)椭圆经过点 A,T,代入椭圆 E 的方程,得 $\begin{cases} b^2=1, \\ \frac{64}{25a^2}+\frac{9}{25b^2}=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2=4, \\ b^2=1. \end{cases}$

所以椭圆 E 的方程为:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………………………… 2 分

由 $\angle MAT=\angle NAT$ 知 AM 与 AN 关于直线 AT:$y=x+1$ 对称,

在 AM 上任取一点 $P_0(x_0,y_0)$,

则 P_0 关于直线 $y=x+1$ 对称的点为 $P'_0(y_0-1,x_0+1)$, ………………………………………… 3 分

从而 $k_1=k_{AP_0}=\frac{y_0-1}{x_0}$,$k_2=k_{AP'_0}=\frac{(x_0+1)-1}{y_0-1}$,

于是 $k_1k_2=1$. ………………………………………………………………………………… 4 分

(2)设点 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,AM:$y=k_1x+1$,

由 $\begin{cases} y=k_1x+1, \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 得 $(4k_1^2+1)x^2+8k_1x=0$,所以 $x_1=-\frac{8k_1}{4k_1^2+1}$,

同理 $x_2=-\frac{8k_2}{4k_2^2+1}$.

由(1)有 $k_1k_2=1$,故 $x_2=-\frac{8k_1}{4+k_1^2}$. ………………………………………………………… 6 分

为方便,记 $k_1=k$,并不妨设 $k>1$,则

于是 $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}|AM|\cdot|AN|\sin\angle MAN=\frac{1}{2}|AM|\cdot|AN|\sqrt{1-\cos^2\angle MAN}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|AM|^2|AN|^2-(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1^2+k_1^2x_1^2)(x_2^2+k_2^2x_2^2)-(x_1x_2+k_1x_1k_2x_2)^2}$$

$=\frac{1}{2}|x_1k_2x_2-x_2k_1x_1|$ ………………………………………………………………… 8 分

$$=\frac{1}{2}|k_2-k_1|\cdot|x_1x_2|=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{k}-k\right|\cdot\left|\frac{-8k}{4k^2+1}\cdot\frac{-8k}{4+k^2}\right|=\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2-1}{k}\cdot\frac{64k^2}{(4k^2+1)(4+k^2)}$$

$=\frac{32k(k^2-1)}{(4k^2+1)(4+k^2)}=\frac{32k(k^2-1)}{4k^4+17k^2+4}$ ………………………………………… 10 分

$=\dfrac{32\left(k-\dfrac{1}{k}\right)}{4k^2+\dfrac{4}{k^2}+17}=\dfrac{32t}{4t^2+25}\leqslant\dfrac{32}{2\sqrt{4\times25}}=\dfrac{32}{2\times10}=\dfrac{8}{5}$（其中 $t=k-\dfrac{1}{k}>0$），

当且仅当 $t=\dfrac{5}{2}$，即 $k-\dfrac{1}{k}=\dfrac{5}{2}$ 时取等.

所以，$\triangle AMN$ 面积的最大值为 $\dfrac{8}{5}$. ………………………………………………… 12 分

命题意图：本小题设置课程学习情境，设计探索性问题，主要考查椭圆的方程、直线的斜率、直线与椭圆的关系等基础知识，考查数形结合、化归与转化思想，考查逻辑推理素养、数学运算核心素养.

21. 解析：(1) 由题 $f(x)=a\mathrm{e}^x-x^2$ 得 $f'(x)=a\mathrm{e}^x-2x$，

因为函数 $f(x)$ 有两个极值点，

所以方程 $f'(x)=0$ 有两个不同实数根，即方程 $a=\dfrac{2x}{\mathrm{e}^x}$ 有两个不同实数根， …………… 2 分

设 $u(x)=\dfrac{2x}{\mathrm{e}^x}$，则 $u'(x)=\dfrac{2-2x}{\mathrm{e}^x}$，

知 $x<1$ 时，$u'(x)>0$，则 $u(x)$ 单调递增，$x>1$ 时，$u'(x)<0$，则 $u(x)$ 单调递减，

所以，$x=1$ 时，$u(x)$ 取得极大值 $u(1)=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，

又 $x<0$ 时，$u(x)<0$；$x>0$ 时，$u(x)>0$，且 $x\to+\infty$ 时，$u(x)\to0$，

所以，方程 $a=\dfrac{2x}{\mathrm{e}^x}$ 有两个不同实数根时，有 $0<a<\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

即 $f(x)$ 有两个极值点时，a 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)$. ……………………………………… 5 分

(2) 由 (1) 可知，$f(x)$ 的两个极值点 x_1,x_2 是方程 $a\mathrm{e}^x-2x=0$ 的两根，

且 $0<a<\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，$0<x_1<1<x_2$，则有 $a\mathrm{e}^{x_1}=2x_1>0$，$a\mathrm{e}^{x_2}=2x_2>0$，

两式相除，得 $\mathrm{e}^{x_2-x_1}=\dfrac{x_2}{x_1}$，则有 $x_2-x_1=\ln\dfrac{x_2}{x_1}>0$. ……………………………………… 6 分

由 $\mathrm{e}x_1+(\mathrm{e}-2)x_2\geqslant\lambda x_1x_2$ 得 $(x_2-x_1)[\mathrm{e}x_1+(\mathrm{e}-2)x_2]\geqslant\lambda x_1x_2\ln\dfrac{x_2}{x_1}$，

所以 $\lambda\leqslant\dfrac{2+(\mathrm{e}-2)\dfrac{x_2}{x_1}-\mathrm{e}\cdot\dfrac{x_1}{x_2}}{\ln\dfrac{x_2}{x_1}}$，令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$， ………………………………………… 7 分

令 $h(t)=\dfrac{2+(\mathrm{e}-2)t-\mathrm{e}\cdot\dfrac{1}{t}}{\ln t}(t>1)$，则需 $\lambda\leqslant h(t)$ 恒成立，

$h'(t)=\dfrac{[(\mathrm{e}-2)t^2+\mathrm{e}]\ln t-2t-(\mathrm{e}-2)t^2+\mathrm{e}}{t^2\ln^2 t}$，

令 $\varphi(t)=[(\mathrm{e}-2)t^2+\mathrm{e}]\ln t-2t-(\mathrm{e}-2)t^2+\mathrm{e}$,

则 $\varphi'(t)=2(\mathrm{e}-2)t\ln t-2-(\mathrm{e}-2)t+\mathrm{e}\cdot\dfrac{1}{t}$,…………………………………………………… 8 分

令 $p(t)=\varphi'(t)=2(\mathrm{e}-2)t\ln t-2-(\mathrm{e}-2)t+\mathrm{e}\cdot\dfrac{1}{t}$,

$p'(t)=2(\mathrm{e}-2)\ln t+2(\mathrm{e}-2)-\mathrm{e}\cdot\dfrac{1}{t^2}-\mathrm{e}+2$ 在$(1,+\infty)$上递增,

可知 $p'(1)<0,p'(\mathrm{e})>0$,则存在 $t_0\in(1,\mathrm{e})$,使得 $p'(t_0)=0$,

当 $t\in(1,t_0)$时,$p'(t)<0$,则 $p(t)$即 $\varphi'(t)$单调递减,当 $t\in(t_0,+\infty)$时,$p'(t)>0$,$p(t)$即 $\varphi'(t)$单调递增,

又 $\varphi'(1)=0,\varphi'(\mathrm{e})>0$,所以存在 $t_1\in(1,\mathrm{e})$,使得 $\varphi'(t_1)=0$,……………………………… 10 分

当 $t\in(1,t_1)$时,$\varphi'(t)<0$,$\varphi(t)$单调递减,$t\in(t_1,+\infty)$时,$\varphi'(t)>0$,$\varphi(t)$单调递增,

又 $\varphi(1)=\varphi(\mathrm{e})=0$,所以 $t\in(1,\mathrm{e})$时,$\varphi(t)<0$,则 $h'(t)<0$,$h(t)$单调递减,$t\in(\mathrm{e},+\infty)$时,$\varphi(t)>0$,$h'(t)>0$,$h(t)$单调递增,

所以 $t=\mathrm{e}$ 时,$h(t)_{\min}=h(\mathrm{e})=(\mathrm{e}-1)^2$,$\lambda$ 的取值范围是$\lambda\leqslant(\mathrm{e}-1)^2$. ……………………… 12 分

命题意图:本小题是以初等函数设置探索性情境,考查函数极值、函数零点、不等式证明、导数的应用等基础知识;考查化归与转化、函数与方程、数形结合等数学思想;考查推理论证能力、运算求解能力和创新能力;考查逻辑推理、数学运算等数学素养.

选考题

22. 解析:(1)将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入 $4\rho^2\sin^2\theta=3(\rho^2-1)$,得

$4y^2=3(x^2+y^2)-3$,

即曲线 C 的直角坐标方程为:$3x^2-y^2-3=0$. ……………………………………………………… 5 分

(2)直线 l 的参数方程可改写为$\begin{cases}x=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数),……………………………… 6 分

代入曲线 C 的方程,有 $3\left(2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}t\right)^2=3$,

整理得 $2t^2+6\sqrt{3}t+9=0$. ………………………………………………………………………… 7 分

从而 $t_1+t_2=-3\sqrt{3}$,$t_1t_2=\dfrac{9}{2}$, …………………………………………………………………… 8 分

所以$|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=3$. ……………………………………………………… 10 分

命题意图:本小题设置课程学习情境,设计基础性问题,考查参数方程的标准化,极坐标方程化普通方程,双曲线的弦长计算,主要考查数学运算素养.

23. 解析：(1)当 $x<-\frac{1}{2}$时，$f(x)=-2x+3-2x-1\leqslant 6-x$，解得$-\frac{4}{3}\leqslant x<-\frac{1}{2}$；

当$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$时，$f(x)=-2x+3+2x+1\leqslant 6-x$，解得$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$；

当 $x>\frac{3}{2}$时，$f(x)=2x-3+2x+1\leqslant 6-x$，解得$\frac{3}{2}<x\leqslant\frac{8}{5}$，

综上所述，原不等式的解集为$\left\{x\left|-\frac{4}{3}\leqslant x\leqslant\frac{8}{5}\right.\right\}$. …………………………………………… 5 分

(2)由题 $f(x)=|2x-3|+|2x+1|\geqslant|2x-3-(2x+1)|=4$，当且仅当$(2x-3)(2x+1)\leqslant 0$

即$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$时取"等号"，故 $f(x)$的最小值 $T=4$，即 $x+y+2z=4$.

证法 1：

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{z+2}=\frac{1}{10}[(x+1)+(y+1)+2(z+2)]\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{z+2}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{10}\left[\sqrt{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}+\sqrt{(y+1)\cdot\frac{1}{y+1}}+\sqrt{2(z+2)\cdot\frac{2}{z+2}}\right]^2=\frac{16}{10}=\frac{8}{5},$$

当且仅当$(x+1)^2=(y+1)^2=(z+2)^2$，即 $x=y=\frac{3}{2}$，$z=\frac{1}{2}$时取等号.

所以，$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{z+2}\geqslant\frac{8}{5}$. ……………………………………………………………… 10 分

证法 2：

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{z+2}=\frac{1}{10}[(x+1)+(y+1)+2(z+2)]\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{z+2}\right)$$

$$=\frac{1}{10}\left[6+\frac{y+1}{x+1}+\frac{x+1}{y+1}+\frac{2(z+2)}{x+1}+\frac{2(x+1)}{z+2}+\frac{2(z+2)}{y+1}+\frac{2(y+1)}{z+2}\right]$$

$$\geqslant\frac{1}{10}\left[6+2\sqrt{\frac{y+1}{x+1}\cdot\frac{x+1}{y+1}}+2\sqrt{\frac{2(z+2)}{x+1}\cdot\frac{2(x+1)}{z+2}}+2\sqrt{\frac{2(z+2)}{y+1}\cdot\frac{2(y+1)}{z+2}}\right]=\frac{8}{5}.$$

当且仅当$\frac{y+1}{x+1}=\frac{x+1}{y+1}$，$\frac{2(z+2)}{x+1}=\frac{2(x+1)}{z+2}$，$\frac{2(z+2)}{y+1}=\frac{2(y+1)}{z+2}$取等号，

即 $x=y=\frac{3}{2}$，$z=\frac{1}{2}$时取等号.

所以，$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{z+2}\geqslant\frac{8}{5}$. ……………………………………………………………… 10 分

命题意图：本小题主要考查含绝对值不等式的解法，考查不等式的证明方法等基础知识，考查分类与整合思想，考查运算求解、推理论证等数学能力.