

乐山市高中 2023 届第二次调查研究考试

数 学(理工类)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、座位号和准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

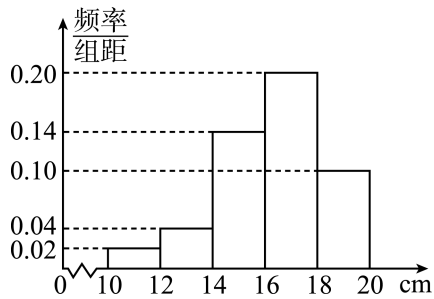
1. 已知 $(1+i)^2 z = 2+i$, 则 $z =$

- A. $\frac{1}{2} - i$ B. $1 - \frac{1}{2}i$ C. $\frac{1}{2} + i$ D. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}i$

2. 设全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x+3}{x-2} \leq 0 \right\}$, $B = \{ x \mid x > 1 \}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$

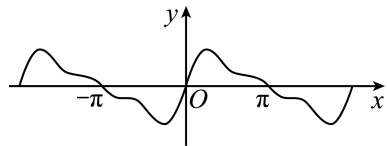
- A. $\{ x \mid -3 \leq x < 2 \}$ B. $\{ x \mid -3 \leq x < 1 \}$
C. $\{ x \mid -3 \leq x \leq 1 \}$ D. $\{ x \mid 1 < x \leq 2 \}$

3. 某乡镇为推动乡村经济发展,优化产业结构,逐步打造高品质的农业生产,在某试验区种植了某农作物. 为了解该品种农作物长势,在实验区随机选取了 100 株该农作物苗,经测量,其高度(单位:cm)均在区间 $[10, 20]$ 内,按照 $[10, 12)$, $[12, 14)$, $[14, 16)$, $[16, 18)$, $[18, 20]$ 分成 5 组,制成如图所示的频率分布直方图,记高度不低于 16 cm 的为“优质苗”. 则所选取的农作物样本苗中,“优质苗”株数为



- A. 20 B. 40 C. 60 D. 88

4. 数学与音乐有着紧密的关联,我们平时听到的乐音一般来说并不是纯音,而是由多种波叠加而成的复合音. 如图为某段乐音的图象,则该段乐音对应的函数解析式可以为



- A. $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$ B. $y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin 3x$
C. $y = \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x$ D. $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x$

5. 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha = 1$, 则 $\sin \alpha =$

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

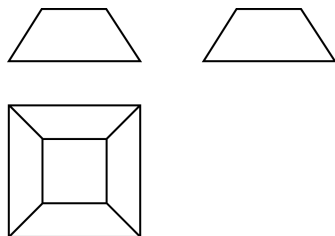
6. 一个四棱台的三视图如图所示, 其中正视图和侧视图均为上底长为 2, 下底长为 4, 腰长为 2 的等腰梯形, 则该四棱台的体积为

A. $\frac{28\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{56}{3}$

C. $28\sqrt{3}$

D. 56



7. 已知实数 a, b 满足 $\log_2 a < \log_2 b < 0$, 则下列各项中一定成立的是

A. $\sqrt{a} > \sqrt{b}$

B. $\sin 2a < \sin 2b$

C. $\log_a e < \log_b e$

D. $a^b < b^a$

8. 已知四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是正方形, $AB=2$, $AA_1=2\sqrt{2}$, 点 B_1 在底面 $ABCD$ 的射影为 BC 中点 H , 则直线 AD_1 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为

A. $\frac{\sqrt{14}}{4}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

9. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$. 给出下列结论: ① $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ 是 $f(x)$ 的最小值; ② 函数 $f(x)$ 在

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增; ③ 将函数 $y=2\sin x$ 的图象上的所有点向左平移 $\frac{11\pi}{6}$ 个单位长度, 可得

到函数 $y=f(x)$ 的图象. 其中所有正确结论的序号是

A. ①②

B. ①③

C. ②③

D. ①②③

10. 已知直线 $l: y=k(x+2) (k>0)$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于点 A, B , 以线段 AB 为直径的圆经过定点 $D(2, 0)$, 则 $|AB| =$

A. 4

B. 6

C. 8

D. 10

11. 在菱形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $\angle A=60^\circ$, 将 $\triangle BCD$ 绕对角线 BD 所在直线旋转至 BPD , 使得 $AP=\sqrt{6}$, 则三棱锥 $P-ABD$ 的外接球的表面积为

A. $\frac{8\pi}{3}$

B. $\frac{20\pi}{3}$

C. $\frac{20\sqrt{15}\pi}{27}$

D. $\frac{25\pi}{3}$

12. 若存在 $x_0 \in [-1, 2]$, 使不等式 $x_0 + (e^2 - 1)\ln a \geq \frac{2a}{e^{x_0}} + e^2 x_0 - 2$ 成立, 则 a 的取值范围是

A. $\left[\frac{1}{2e}, e^2\right]$

B. $\left[\frac{1}{e^2}, e^2\right]$

C. $\left[\frac{1}{e^2}, e^4\right]$

D. $\left[\frac{1}{e}, e^4\right]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$, $\overrightarrow{AC}=(2,t)$, $|\overrightarrow{BC}|=1$, 则实数 $t=$ _____.
14. 已知 $(x+a)(x-2)^5$ 的展开式中含 x^3 项的系数为 -60 , 则 $a=$ _____.
15. 已知 O 为坐标原点, 直线 $y=x+2$ 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的两条渐近线从左往右顺次交于 A, B 两点. 若 $2|OA|=|OB|$, 则双曲线 C 的离心率为 _____.
16. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $(2a-c)\cos B=b\cos C$, 且 $b=\sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生依据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17. (12 分)

某商店销售某种产品, 为了解客户对该产品的评价, 现随机调查了 200 名客户, 其评价结果为“一般”或“良好”, 并得到如下列联表:

	一般	良好	合计
男	20	100	120
女	30	50	80
合计	50	150	200

- (1)通过计算判断, 有没有 99% 的把握认为客户对该产品的评价结果与性别有关系?
- (2)该商店在春节期间开展促销活动, 该产品共有如下两个销售方案.

方案一: 按原价的 8 折销售;

方案二: 顾客购买该产品时, 可在一个装有 4 张“每满 200 元少 80 元”, 6 张“每满 200 元少 40 元”共 10 张优惠券的不透明箱子中, 随机抽取 1 张, 购买时按照所抽取的优惠券进行优惠.

已知该产品原价为 260(元/件). 顾客甲若想采用方案二的方式购买一件产品, 估计顾客甲需支付的金额; 你认为顾客甲选择哪种购买方案较为合理?

附表及公式:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

其中 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n=a+b+c+d$.

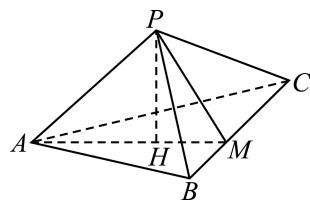
18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, $a_1+a_3=a_4$. $\{b_n\}$ 是公比大于 0 的等比数列, $b_1=3$, $b_3-b_2=18$.

- (1)求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;
- (2)若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=a_nb_n$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中, H 为 $\triangle ABC$ 的内心,直线 AH 与 BC 交于 M , $\angle PAB=\angle PAC$, $\angle PCA=\angle PCB$.



(1)证明:平面 $PAM \perp$ 平面 ABC ;

(2)若 $AB \perp BC$, $PA=AB=3$, $BC=4$,求二面角 $M-PA-C$ 的余弦值.

20. (12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过 $A(0,1)$, $T(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5})$ 两点, M, N 是椭圆 E 上异于 T 的两动点,且 $\angle MAT = \angle NAT$,若直线 AM, AN 的斜率均存在,并分别记为 k_1, k_2 .

(1)求证: $k_1 k_2$ 为常数;

(2)求 $\triangle AMN$ 面积的最大值.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = ae^x - x^2$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$.

(1)求 a 的取值范围;

(2)若 $ex_1 + (e-2)x_2 \geq \lambda x_1 x_2$,求 λ 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题记分.

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{3}t, \\ y = t \end{cases} (t \text{ 为参数})$.以坐标原点 O 为极点, x

轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $4\rho^2 \sin^2 \theta = 3(\rho^2 - 1)$.

(1)求 C 的直角坐标方程;

(2)设直线 l 与曲线 C 交于 A, B ,求 $|AB|$.

23. [选修 4-5:不等式选讲](10 分)

设函数 $f(x) = |2x-3| + |2x+1|$.

(1)解不等式 $f(x) \leq 6-x$;

(2)令 $f(x)$ 的最小值为 T ,正数 x, y, z 满足 $x+y+2z=T$,

证明: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{z+2} \geq \frac{8}{5}$.