

理科数学参考解答及评分参考

一、选择题

1. 答案:D

命题意图:本小题设置课程知识背景,设计二次不等式与含参不等式的集合并集运算,主要考查二次不等式的解法,不等式的并集运算和参数取值范围等基础知识;考查运算求解能力,化归与转化思想.

解析:由集合 $A = \{x | x^2 - x - 6 \leq 0\} = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | -4 \leq x \leq a\}$, 根据并集运算定义,要得到 $A \cup B = \{x | -4 \leq x \leq 3\}$, 则 $-2 \leq a \leq 3$.

2. 答案:A

命题意图:本小题设置课程知识背景,设计向量数量积与模的问题,主要考查数量积的运算,模的运算等基础知识;考查运算求解能力.

解析: $(a - 2b) \cdot b = a \cdot b - 2b^2 = -2 - 2 \times 1^2 = -4$.

3. 答案:D

命题意图:本小题以工业生产者出厂价格指数(PPI)为命题情景,以同比、环比涨跌幅折线图为载体考查统计图的理解和相关统计量的含义等问题,考查概率统计思想和应用意识.

解析:根据统计图表和同比增长、环比增长的含义,A,B 不正确;根据折线图,2022 年各月 PPI 同比涨跌幅的方差应大于环比涨跌幅的方差,C 错误;2022 年上半年各月 PPI 同比涨跌幅的方差小于下半年各月 PPI 环比涨跌幅的方差,D 正确.

4. 答案:C

命题意图:本小题以算法初步为命题情景,以程序框图为载体考查算法初步、三角函数求值等知识,考查推理论证等数学能力.

解析:由题可知, $S = \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{2\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{4\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{6\pi}{4} + \sin \frac{7\pi}{4} + \sin \frac{8\pi}{4} = 0$.

5. 答案:C

命题意图:本小题设置大运会背景,设计志愿者分配到场馆问题,主要考查两个计数原理及排列、组合等基础知识;考查运算求解能力,分类讨论思想,应用意识.

解析:依题意,有且仅有 2 名志愿者分配到同一个场馆,所以不同的分配方案有 $C_4^2 A_3^3 = 36$ (种).

6. 答案:A

命题意图:本小题是由指数型函数、幂函数构成的分式型函数为知识探索情景,以图象识别为载体,考查函数图象和性质等知识;考查数形结合思想;考查推理论证等数学能力.

解析:由题有 $f(-x)=f(x)$,可知函数 $f(x)$ 为偶函数,B,C 错误;根据指数函数与幂函数的函数值趋势判断,D 错误,故选 A.

7. 答案:B

命题意图:本小题设置课程知识背景,设计三角函数图象变换问题,主要考查正弦函数图象的平移变换,诱导公式,余弦函数图象性质等基础知识;考查运算求解能力,数形结合思想,应用意识.

解析:函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到 $y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$,由 $2k\pi\leq 2x\leq 2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}$,解得 $k\pi\leq x\leq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$,当 $k=1$ 时,知函数在区间 $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减.

8. 答案:A

命题意图:本小题设置课程知识背景,设计递增等差数列求最值问题,主要考查等差数列的通项公式,公差,前 n 项和公式,最值问题等基础知识;考查运算求解能力,推理论证能力,应用意识.

解析:设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,由已知得 $a_1+d+a_1+3d=-10$,由 $a_1=-9$ 得 $d=2$,所以 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=-9n+n(n-1)=n^2-10n=(n-5)^2-25$,所以当 $n=5$ 时, S_n 取得最小值,最小值为 -25 .

9. 答案:C

命题意图:本小题设置课程学习情境,设计综合性问题,考查抛物线的几何性质,直线与抛物线的位置关系.考查推理论证与数学运算素养.

解析:设准线 l 与 x 轴的交点为 K ,由抛物线定义知 $|PF|=|PH|$,而 $|PF|=|FH|$,故 $\triangle PHF$ 为正三角形,从而直线 $PQ:y=\sqrt{3}(x-2)$,代入 $y^2=8x$ 得 $y^2-\frac{8}{\sqrt{3}}y-16=0$,解得 $y_P=\frac{12}{\sqrt{3}}, y_Q=\frac{-4}{\sqrt{3}}$,从而 $H(-2, 4\sqrt{3}), P(6, 4\sqrt{3}), Q\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$,而 $F(2, 0)$,故 $S_{\triangle PFH}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 8^2=16\sqrt{3}, S_{\triangle OFQ}=\frac{1}{2}|OF|\times|y_Q|=\frac{4}{\sqrt{3}}$,从而面积比值为 12.

说明:可以推断 H, O, Q 共线,利用相似三角形求解.

10. 答案:B

命题意图:本小题设置课程学习情境,设计综合性、探究性问题,以直棱柱为载体,考查线面平行、垂直等基础知识,线面角的计算,考查化归转化的能力,考查直观想象素养.

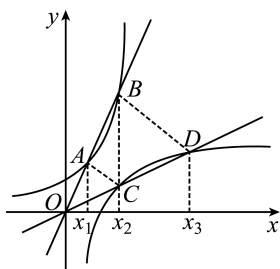
解析:设 M, N 分别为 B_1C_1, BB_1 的中点,记 $\overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}=\frac{2}{3}m\overrightarrow{CB}+\left(1-\frac{2}{3}m\right)\overrightarrow{CC_1}$,则 $F\in$

$BC_1, P \in MN$, 设 H 为 BC 中点, 由平面 $ABC \perp$ 平面 BCC_1B_1 , $AB = AC = \sqrt{3}$, $BC = 2$ 知, $AH \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 所以直线 AP 与平面 BCC_1B_1 所成角为 $\angle APH$, $\tan \angle APH = \frac{AH}{PH} = \frac{\sqrt{2}}{PH}$. 故当 PH 最小时, $\tan \angle APH$ 取得最大值, 此时 $PH \perp MN$. 故当点 P 在点 N 时, $\tan \angle APH$ 取得最大值 1, 所以直线 AP 与平面 BCC_1B_1 所成角的最大值为 $\frac{\pi}{4}$. 故选 B.

11. 答案: D

命题意图: 本小题以函数零点为知识性探索情景, 主要考查函数性质、指数式与对数式的互化等基础知识, 考查化归与转化、函数与方程、数形结合思想等数学思想, 考查推理论证、运算求解等数学能力; 考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等素养.

解析: 在同一坐标系作出 $y = e^x$ 与 $y = \ln x$ 的图象, 由于 $y = e^x - ax$ 与 $y = \ln x - \frac{1}{a}x$ 各有两个零点, 则 $a > 0$. 设函数 $y = ax$ 与 $y = e^x$ 图象交点坐标分别为 $A(x_1, e^{x_1}), B(x_2, e^{x_2})$; $y = \frac{1}{a}x$ 与 $y = \ln x$ 图象交点坐标分别为 $C(x_2, \ln x_2), D(x_3, \ln x_3)$. 由于 $y = e^x$ 与 $y = \ln x$, $y = ax$ 与 $y = \frac{1}{a}x$, 互为反函数, 则点 A, C 关于直线 $y = x$ 对称, $B,$



D 关于直线 $y = x$ 对称, 则 $x_1 = \ln x_2, x_3 = e^{x_2}$, 且 $x_1 \cdot x_3 = \ln x_2 \cdot e^{x_2} = \frac{1}{a}x_2 \cdot ax_2 = x_2^2$, 故结论①, ②, ④正确.

12. 答案: D

命题意图: 本小题设置课程学习情境, 设计综合性问题, 考查双曲线的标准方程, 双曲线的几何性质等基础知识, 考查化归与转化的数学思想, 考查推理论证等数学素养.

解析: 过 F_2 作 $F_2K \perp F_1T$, 垂足为 K , 则 $|F_2K| = 2|OT| = 2b$, 因为 $\sin \angle F_1MF_2 = \frac{4}{5} = \sin \angle KMF_2$, 所以 $|F_2M| = \frac{5}{2}b, |KM| = \frac{3}{2}b$, 而 $|F_1T| = a, |F_1K| = 2a$, 故 $|F_1M| = 2a - \frac{3}{2}b$, $|MT| = \frac{3}{2}b - a$, 由双曲线的定义 $|F_2M| - |F_1M| = 2a = \frac{5}{2}b - (2a - \frac{3}{2}b)$, 即 $b = a$, 而 $S_{\triangle OMT} = \frac{1}{2}|MT| \times |OT| = 1$, 故 $(\frac{3}{2}b - a)b = 2$, 解得 $a = 2$, 从而选 D.

二、填空题

13. 答案: $1 - i$.

命题意图: 本小题设置课程知识情景, 设计复数的除法运算问题, 主要考查复数的除法运算及其相关概念等基础知识; 考查运算求解能力.

解析: $\frac{7+i}{3+4i} = \frac{(7+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{25-25i}{25} = 1-i$.

14. 答案: $-\frac{11}{2}$.

命题意图: 本小题设置课程知识背景, 设计线性规划问题, 主要考查约束条件表示的可行域中, 目标函数的最值问题等基础知识; 考查运算求解能力, 数形结合思想, 应用意识.

解析: 约束条件
$$\begin{cases} 2x-3y+6\geqslant 0, \\ 2x+y+2\geqslant 0, \\ x\leqslant 1 \end{cases}$$
 表示的可行域为以 $(-\frac{3}{2}, 1), (1, \frac{8}{3}), (1, -4)$ 三点为顶点的三

角形及其内部, 设 $z=3x-y$, 则直线 $z=3x-y$ 过点 $(-\frac{3}{2}, 1)$ 时, $3x-y$ 取得最小值 $-\frac{11}{2}$.

15. 答案: $3\times 2^{n-1}-2$.

命题意图: 本小题以课程知识为背景, 设计递推数列问题, 主要考查递推数列求数列通项公式, 等比数列等基础知识; 考查运算求解能力, 应用意识.

解析: 由 $a_{n+1}=2a_n+2$, 有 $a_{n+1}+2=2(a_n+2)$, 所以 $\frac{a_{n+1}+2}{a_n+2}=2$, 又 $a_1=1$, 所以 $\{a_n+2\}$ 是以 3 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $a_n+2=3\times 2^{n-1}$, 即 $a_n=3\times 2^{n-1}-2, n\in\mathbf{N}^*$.

16. 答案: $16(\sqrt{2}-1)\pi$.

命题意图: 本小题设置课程学习情境, 设计综合性、探究性问题, 以三棱锥为载体, 考查面面垂直、三棱锥的外接球等基础知识, 考查函数与方程、化归与转化等数学思想, 考查直观想象、数学运算、推理论证等素养.

解析: 设 D 为 AC 的中点, O_1, O_2 为 $\triangle PAC, \triangle ABC$ 的外心. 由于 $PA=PC=BA=BC$, 故 $O_1\in PD, O_2\in BD$. 设 $DO_1=d, AC=2a, \triangle PAC$ 的外接圆的半径为 r , 三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径为 R , 可考虑两种情形: ①当 O_1 不在 $\triangle PAC$ 外时, $PD=\sqrt{4-a^2}=r+d, r^2=d^2+a^2$, 即 $d=\frac{2}{r}-r(0<r\leqslant\sqrt{2})$, 故 $R^2=d^2+r^2=2r^2+\frac{4}{r^2}-4\geqslant 4\sqrt{2}-4$, 当 $r^4=2$ 时, 取“=”;

②当 O_1 在 $\triangle PAC$ 外时, $PD=\sqrt{4-a^2}=r-d, r^2=d^2+a^2$, 即 $d=r-\frac{2}{r}(r>\sqrt{2})$, 故 $R^2=d^2+r^2=2r^2+\frac{4}{r^2}-4\geqslant 4\sqrt{2}-4$, 当 $r^4=2$ 时, 取“=”, 不成立. 综上, 有 $R^2\geqslant 4\sqrt{2}-4$, 故三棱锥 $P-$

ABC 的外接球表面积的最小值为 $16(\sqrt{2}-1)\pi$.

三、解答题

17. (12 分)

命题意图: 本小题以产品加工生产线考察为生活实践情景, 设置概率统计应用问题, 考查统计、离散型随机变量的分布列和数学期望等基础知识; 考查运算求解、数据处理能力、应用能力以及数学建模、数学运算素养.

解析: (1) 甲生产线抽取 200 件产品中, 评分在 $[75, 80), [80, 85), [85, 90), [90, 95), [95, 100]$ 的频率分别为 0.05, 0.05, 0.15, 0.5, 0.25. 2 分

则评分均值为 $\bar{X} = 77.5 \times 0.05 + 82.5 \times 0.05 + 87.5 \times 0.15 + 92.5 \times 0.5 + 97.5 \times 0.25 = 91.75$.

所以,甲生产线抽取 200 件产品的评分的均值为 91.75 分. 4 分

(2)分别在甲、乙生产线抽取到“优质品”的概率为 $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$, 又 $\xi=0,1,2,3,4$.

则 $P(\xi=0)=C_2^0\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times C_2^0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{64}$; 5 分

$P(\xi=1)=C_2^1 \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot C_2^0\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^0\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{8}{64}$; 6 分

$P(\xi=2)=C_2^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 C_2^0\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^0\left(\frac{1}{4}\right)^2 C_2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{22}{64}$; 7 分

$P(\xi=3)=C_2^1 \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot C_2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{24}{64}$; 8 分

$P(\xi=4)=C_2^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times C_2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{64}$ 9 分

则 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{8}{64}$ 或填 $\frac{1}{8}$	$\frac{22}{64}$ 或填 $\frac{11}{32}$	$\frac{24}{64}$ 或填 $\frac{3}{8}$	$\frac{9}{64}$

..... 10 分

故数学期望 $EX=0 \times \frac{1}{64}+1 \times \frac{8}{64}+2 \times \frac{22}{64}+3 \times \frac{24}{64}+4 \times \frac{9}{64}=\frac{160}{64}=\frac{5}{2}$ 12 分

18. (12 分)

命题意图:本小题设置课程知识背景,设计三角形边角问题,主要考查正弦定理、余弦定理、二倍角公式、两角差的正弦公式等基础知识;考查运算求解能力、推理论证能力,考查化归与转化思想.

解析:(1)在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理及 $b=2, \sin B: \sin C=\sqrt{2}: 2$,

可得 $c=\frac{b \sin C}{\sin B}=2 \times \frac{2}{\sqrt{2}}=2 \sqrt{2}$ 3 分

(2)由 $\sin A: \sin B: \sin C=1: \sqrt{2}: 2$ 及正弦定理得 $a: b: c=1: \sqrt{2}: 2$,

再由余弦定理有 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2 b c}=\frac{5 \sqrt{2}}{8}$ 6 分

(3)由(2)可得 $\sin A=\sqrt{1-\cos ^2 A}=\frac{\sqrt{14}}{8}$,

所以 $\sin 2 A=2 \sin A \cos A=2 \times \frac{\sqrt{14}}{8} \times \frac{5 \sqrt{2}}{8}=\frac{5 \sqrt{7}}{16}$,

$\cos 2 A=2 \cos ^2 A-1=\frac{9}{16}$ 9 分

$$\text{所以 } \sin\left(2A - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2A \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2A \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{5\sqrt{7}}{16} \times \frac{1}{2} - \frac{9}{16} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{5\sqrt{7} - 9\sqrt{3}}{32}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (12 分)

命题意图: 本小题设置课程学习情境, 设计综合性、探究性问题, 考查线面垂直、面面平行等基础知识, 考查化归与转化等数学思想, 考查直观想象、数学运算、推理论证等素养.

解析: (1) 当 M 为 PD 的中点时满足条件. 证明如下: $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

设 O 为 AC, BD 的交点.

因为四边形 $ABCD$ 为正方形, 所以 O 为 BD 的中点,

故在 $\triangle PBD$ 中, OM 为 $\triangle PBD$ 的中位线, 即 $OM \parallel BP$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

又因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD, CQ \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $AP \parallel CQ$, 即四点 A, C, P, Q 共面,

又因为 $PA = CQ$, 所以四边形 $ACQP$ 为平行四边形, 所以 $AC \parallel PQ$. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

而 AC 与 OM 相交, PQ 与 BP 相交, 所以平面 $ACM \parallel$ 平面 BPQ .

又因为 $AM \subset$ 平面 ACM , 所以直线 $AM \parallel$ 平面 BPQ . $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp AB$.

因为四边形 $ABCD$ 为正方形, 所以 $AB \perp AD$, 故 $AB \perp$ 平面 PAD .

又因为 $AM \subset$ 平面 PAD , 所以 $AB \perp AM$, 即 $\triangle ABM$ 为直角三角形.

由于 $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} |AB| |AM|$, 故当 $|AM|$ 最小时, $S_{\triangle ABM}$ 最小, 此时 $AM \perp PD$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

因为 $AD = 4, PA = 2, PA \perp AD$,

所以 $AM = \frac{4\sqrt{5}}{5}, PM = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 即 $PM = \frac{1}{5} PD$.

由 $PA \perp AB, PA \perp AD, AB \perp AD$, 可以以 AB, AD, AP 所在直线为 x, y, z 轴建立如图所示坐标系.

则 $A(0, 0, 0), B(4, 0, 0), D(0, 4, 0), C(4, 4, 0), P(0, 0, 2)$,

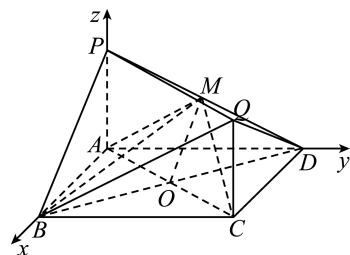
所以 $M\left(0, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

所以 $\overrightarrow{DC} = (4, 0, 0) = 4(1, 0, 0)$,

$\overrightarrow{DM} = \left(0, -\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right) = \frac{8}{5}(0, -2, 1)$.

由上, 易得平面 DCM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1 = (0, 1, 2)$.

又因为 $\overrightarrow{BC} = (0, 4, 0), \overrightarrow{BM} = \left(-4, \frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right) = -\frac{4}{5}(5, -1, -2)$,



设平面 BCM 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则 $\begin{cases} y_2 = 0, \\ 5x_2 - y_2 - 2z_2 = 0. \end{cases}$

可得平面 BCM 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (2, 0, 5)$.

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{10}{\sqrt{5} \times \sqrt{29}} = \frac{2\sqrt{145}}{29}. \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

注意到二面角 $B-CM-D$ 的平面角是钝角,

$$\text{所以二面角 } B-CM-D \text{ 的余弦值为 } -\frac{2\sqrt{145}}{29}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. (12 分)

命题意图: 本小题设置课程学习情境, 设计综合性、探究性问题. 考查椭圆的标准方程, 直线与椭圆的位置关系等基础知识, 考查数学运算、推理论证等核心素养.

解析: (1) 由题意 $c = b = \sqrt{2}$, 从而 $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 2$,

$$\text{于是 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

(2) 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), N(2\sqrt{2}, n)$, 直线 PQ 的方程为 $x = ty + \sqrt{2}$, 其中 $t = \frac{\sqrt{2}}{n}$.

$$\text{由 } \begin{cases} x = ty + \sqrt{2}, \\ x^2 + 2y^2 = 4, \end{cases} \text{ 得 } (t^2 + 2)y^2 + 2\sqrt{2}ty - 2 = 0,$$

$$\text{故 } y_1 + y_2 = \frac{-2\sqrt{2}t}{t^2 + 2}, y_1 y_2 = \frac{-2}{t^2 + 2}. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{从而 } \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} = \frac{(ty_1 + \sqrt{2})y_2 + (ty_2 + \sqrt{2})y_1}{y_1 y_2}$$

$$= 2t + \frac{\sqrt{2}(y_1 + y_2)}{y_1 y_2} = 2t + \frac{-4t}{-2} = 4t = \frac{4\sqrt{2}}{n}.$$

$$\text{因为 } k_3 = k_{ON} = \frac{n}{2\sqrt{2}}, \text{ 所以 } \frac{1}{k_3} = \frac{2\sqrt{2}}{n}.$$

$$\text{从而 } \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{2}{k_3}, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{即 } \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} = \frac{2}{k_3}, \text{ 于是 } (k_1 + k_2)k_3 = 2k_1 k_2.$$

$$\text{由 } (k_1 + k_2)k_3 = 1 \text{ 得 } k_1 k_2 = \frac{1}{2}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设 $OP: y = k_1 x, OQ: y = k_2 x$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = k_1 x, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \text{ 得 } (1 + 2k_1^2)x^2 = 4, \text{ 即 } x_p^2 = \frac{4}{1 + 2k_1^2}.$$

同理可得 $x_Q^2 = \frac{4}{1+2k_2^2}$.

$$\text{故 } |OP|^2 + |OQ|^2 = (1+k_1^2) \frac{4}{1+2k_1^2} + (1+k_2^2) \frac{4}{1+2k_2^2}$$

$$= 4 \left(\frac{k_1^2+1}{2k_1^2+1} + \frac{k_2^2+1}{2k_2^2+1} \right)$$

$$= 4 \left[\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2k_1^2+1} + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2k_2^2+1} \right]$$

$$= 4 + 2 \left(\frac{1}{2k_1^2+1} + \frac{1}{2k_2^2+1} \right)$$

$$= 4 + 2 \left(\frac{2k_1^2+2k_2^2+2}{4k_1^2k_2^2+2k_1^2+2k_2^2+1} \right) = 6. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. (12 分)

命题意图:本小题是以初等函数为载体设置的探索性情景,考查函数极值、函数零点、不等式证明、导数的应用等基础知识;考查化归与转化、函数与方程、数形结合等数学思想;考查推理论证能力、运算求解能力和创新能力;考查逻辑推理、数学运算等数学素养.

解析:(1)由 $f(x) = (x-1)e^x + ax + 2$, 得 $f'(x) = xe^x + a$,

①若 $a \geq 0$, 则 $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 满足条件;

②若 $a < 0$, 令 $g(x) = xe^x + a$, 可知 $x > 0$ 时, $g(x)$ 单调递增, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

由于 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上存在单调递增区间, 则 $g(x) > 0$ 即 $a > -xe^x$ 在 $(0, 1)$ 上有解,

由于 $-xe^x$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 则 $-e < -xe^x < 0$, 此时 $-e < a < 0$.

综上所述, 若 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上存在单调递增区间, 则 a 的取值范围是 $(-e, +\infty)$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2)令 $h(x) = (x-1)e^x + ax - \sin x - \cos x + 2$, 原不等式即为 $h(x) \geq 0$,

可得 $h(0) = 0, h'(x) = xe^x + a - \cos x + \sin x, h'(0) = a - 1$,

令 $u(x) = h'(x) = xe^x + a - \cos x + \sin x$, 则 $u'(x) = (x+1)e^x + \sin x + \cos x$,

又设 $t(x) = (x+1)e^x$, 则 $t'(x) = (x+2)e^x$, 则 $x \geq 0, t'(x) > 0$, 可知 $t(x)$ 单调递增,

若 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, 有 $(x+1)e^x > 0, \sin x + \cos x > 0$, 则 $u'(x) > 0$; $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

若 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$, 有 $(x+1)e^x \geq \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)e^{\frac{\pi}{2}} > e$, 则 $u'(x) = (x+1)e^x + \sin x + \cos x > 0$,

所以, $x \geq 0, u'(x) > 0$, 则 $u(x)$ 即 $h'(x)$ 单调递增,

i) 当 $a - 1 \geq 0$ 即 $a \geq 1$ 时, $h'(x) \geq h'(0) \geq 0$, 则 $h(x)$ 单调递增,

所以, $h(x) \geq h(0) = 0$ 恒成立, 则 $a \geq 1$ 符合题意. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

ii) 当 $a - 1 < 0$ 即 $a < 1$ 时,

$$h'(0) < 0, h'(2-a) = (2-a)e^{(2-a)} + a - \cos(2-a) + \sin(2-a) \geq 2-a+a-\cos(2-a)+$$

$$\sin(2-a) > 0,$$

存在 $x_0 \in (0, 2-a)$, 使得 $h'(x_0) = 0$,

当 $0 < x < x_0$ 时, $h'(x) < 0$, 则 $h(x)$ 单调递减, 所以 $h(x) < h(0) = 0$, 与题意不符,

综上所述, a 的取值范围是 $[1, +\infty)$ 12 分

选考题

22. (10 分)

命题意图: 本小题设置课程学习情境, 设计综合性问题, 考查圆的参数方程、直角坐标方程与极坐标方程的互化、直线与圆的位置关系等基础知识, 考查数学运算、推理论证等核心素养.

解析: (1) 由已知, $\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$,

所以 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$, 即 $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$,

故 C 的普通方程为 $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ 3 分

又因为 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$,

所以 C 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta = 0$,

即 $\rho = 2 \sin \theta - 2 \cos \theta$ 5 分

(2) 由题意知 $|OA| = 2 \sin \pi - 2 \cos \pi = 2$,

$|OB| = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 2 \cos \alpha + 2 \sin \alpha$, 6 分

于是 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |OB| \sin \left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right]$

$= (2 \cos \alpha + 2 \sin \alpha) \cos \alpha = 2 \cos^2 \alpha + \sin 2\alpha$

$= \sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1 = \sqrt{2} \sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ 8 分

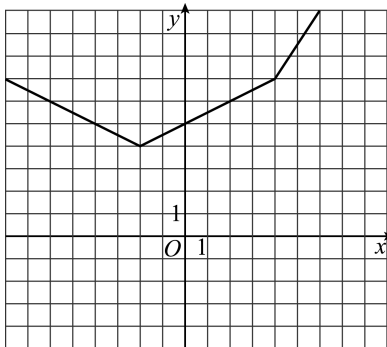
因为 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $\frac{\pi}{4} \leq 2\alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{4}$,

所以当 $2\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 即当 $\alpha = \frac{\pi}{8}$ 时, $\triangle AOB$ 的面积最大, 且最大值是 $\sqrt{2} + 1$ 10 分

23. (10 分)

命题意图: 本小题主要考查含绝对值不等式的解法, 考查不等式的证明方法等基础知识, 考查分类与整合思想, 考查运算求解、推理论证等数学能力.

解析: (1) 由题, 得 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 3, & x < -2, \\ \frac{1}{2}x + 5, & -2 \leq x \leq 4, \\ \frac{3}{2}x + 1, & x > 4, \end{cases}$ 图象如图所示. 3 分



..... 4 分

由图可知, $f(x) \leq 6$ 的解集为 $\{x | -6 \leq x \leq 2\}$ 5 分

(2) 由(1)知, 函数 $f(x)$ 的最小值为 $T=4$. 则 $a+b=4$ 6 分

只需证明 $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \geq \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ 即可.

由已知, $a > 0, b > 0$, 则 $4 = a+b \geq 2\sqrt{ab}$, 所以 $0 < ab \leq 4$ 7 分

于是 $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \geq \frac{2}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}$, 8 分

$$\text{因为 } (a^2+1)(b^2+1) = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1$$

$$= a^2b^2 + (a+b)^2 - 2ab + 1$$

$$= a^2b^2 - 2ab + 17$$

$$= (ab-1)^2 + 16,$$

由于 $0 < ab \leq 4$, 则 $16 \leq (ab-1)^2 + 16 \leq 25$, 即 $16 \leq (a^2+1)(b^2+1) \leq 25$,

所以 $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \geq \frac{2}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}} \geq \frac{2}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$, 当且仅当 $a=b=2$ 时, 等号成立.

..... 10 分