

成都市 2020 级高中毕业班第二次诊断性检测

数学(文科)参考答案及评分意见

第 I 卷 (选择题,共 60 分)

一、选择题:(每小题 5 分,共 60 分)

1. C; 2. C; 3. B; 4. C 5. A; 6. B; 7. D 8. A; 9. B; 10. D; 11. A; 12. D.

第 II 卷 (非选择题,共 90 分)

二、填空题:(每小题 5 分,共 20 分)

13. $\sqrt{2}$; 14. $-\frac{3}{5}$; 15. 1; 16. $\sqrt{31}$.

三、解答题:(共 70 分)

17. 解:(I)由题意,列联表如下:

报名班型	课 程		合 计
	“劳育课程”	“美育课程”	
文科班	35	35	70
理科班	10	20	30
合 计	45	55	100

……6 分

$$(II) \because K^2 = \frac{100 \times (35 \times 20 - 35 \times 10)^2}{45 \times 55 \times 70 \times 30} = \frac{700}{297} \approx 2.357 < 6.635,$$

……10 分

\therefore 没有 99%的把握认为“劳育课程”“美育课程”的选择与文理科有关.

……12 分

18. 解:(I)设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

$\because a_1, a_2 + 3, a_3 - 6$ 成等差数列,

$$\therefore 2(a_2 + 3) = a_1 + a_3 - 6.$$

……2 分

$$\therefore 2a_1q + 6 = a_1 + a_1q^2 - 6.$$

……3 分

$$\therefore q = 3,$$

$$\therefore \text{解得 } a_1 = 3.$$

……5 分

$$\therefore a_n = 3^n.$$

……6 分

(II)设 $b_n = na_n$, 则 $b_n = n \cdot 3^n$.

$$\therefore T_n = 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \dots + n \times 3^n \quad \text{①}$$

$$\therefore 3T_n = 3^2 + 2 \times 3^3 + 3 \times 3^4 + \dots + n \times 3^{n+1} \quad \text{②}$$

$$\text{由①-②得, } -2T_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n - n \cdot 3^{n+1}$$

……8 分

$$\therefore -2T_n = \frac{3 \times (1 - 3^n)}{1 - 3} - n \cdot 3^{n+1}$$

……10 分

$$\therefore T_n = \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{4}.$$

.....12分

19. 解:(I)取 B_1C_1 的中点 O , 连接 AO, A_1O .

$\because \triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle AB_1C_1$ 均是边长为 2 的正三角形,

$\therefore AO \perp B_1C_1, A_1O \perp B_1C_1, A_1O = AO = \sqrt{3}$.

.....2分

$\therefore \angle AOA_1$ 为二面角 $A-B_1C_1-A_1$ 的平面角.

.....3分

$\because AA_1 = \sqrt{6}$,

$\therefore A_1O^2 + AO^2 = A_1A^2$.

$\therefore A_1O \perp AO$.

.....5分

\therefore 平面 $AB_1C_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

.....6分

(II) $V_{A-BB_1C_1C} = V_{ABC-A_1B_1C_1} - V_{A-A_1B_1C_1} = 2V_{A-A_1B_1C_1}$.

.....9分

由(I)知, $A_1O \perp AO, AO \perp B_1C_1$.

$\because A_1O \cap B_1C_1 = O, B_1C_1 \subset$ 面 $A_1B_1C_1, A_1O \subset$ 面 $A_1B_1C_1$,

$\therefore AO \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

$\therefore AO$ 为三棱锥 $A-A_1B_1C_1$ 的高.

.....10分

$\therefore V_{A-A_1B_1C_1} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle A_1B_1C_1} \times AO = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 \times \sqrt{3} = 1$.

.....11分

\therefore 四棱锥 $A-BB_1C_1C$ 的体积为 2.

.....12分

20. 解:(I)由题意,设椭圆 C 的方程 $mx^2 + ny^2 = 1 (m > 0, n > 0, m \neq n)$.

.....1分

\because 椭圆 C 经过 $P(\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}), Q(\sqrt{6}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ 两点,

$$\therefore \begin{cases} 3m + \frac{8}{3}n = 1 \\ 6m + \frac{4}{3}n = 1 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} m = \frac{1}{9} \\ n = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

.....3分

\therefore 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

.....5分

(II)当直线 l 斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y = kx + 1, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

则 $D(\frac{3x_2}{2}, \frac{3y_2}{2}), E(x_1 + \frac{3x_2}{2}, y_1 + \frac{3y_2}{2})$.

\because 点 A, B, E 均在椭圆 C 上,

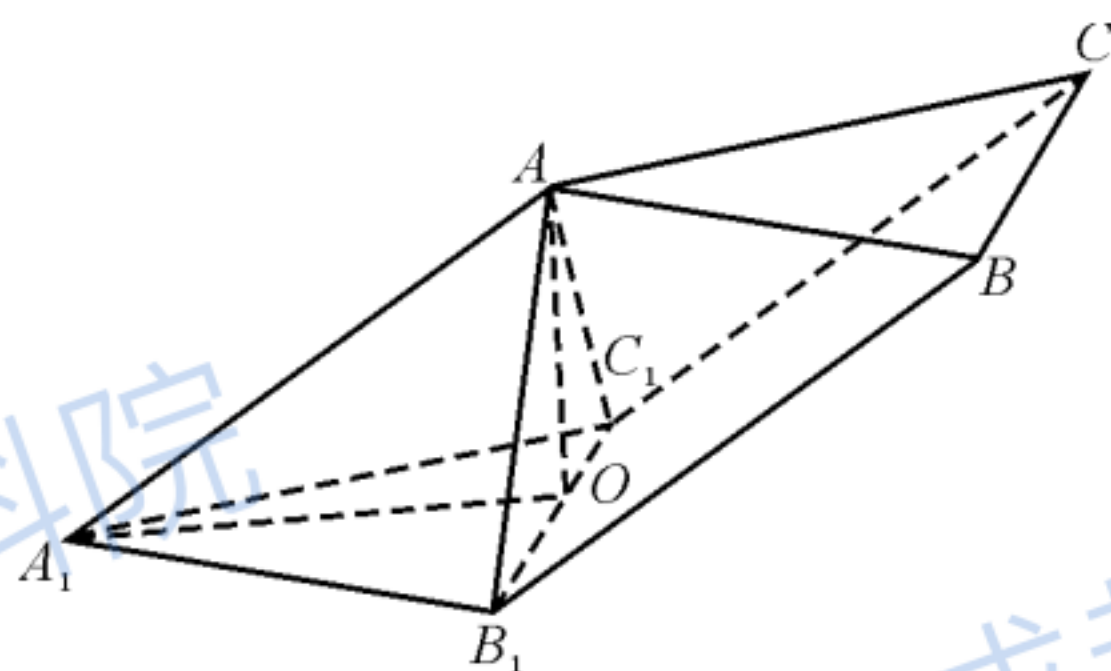
$$\therefore \frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1, \frac{x_2^2}{9} + \frac{y_2^2}{4} = 1, \frac{(x_1 + \frac{3x_2}{2})^2}{9} + \frac{(y_1 + \frac{3y_2}{2})^2}{4} = 1.$$

$\therefore 4x_1x_2 + 9y_1y_2 + 27 = 0$.

.....7分

$\therefore (4 + 9k^2)x_1x_2 + 9k(x_1 + x_2) + 36 = 0$.

.....8分



由 $\begin{cases} y = kx + 1, \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$ 消去 y , 得 $(9k^2 + 4)x^2 + 18kx - 27 = 0$.

显然 $\Delta = 432(3k^2 + 1) > 0$.

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{-18k}{9k^2 + 4}, x_1x_2 = \frac{-27}{9k^2 + 4}$ 9分

$\therefore \frac{-27}{9k^2 + 4} \times (4 + 9k^2) - \frac{18k}{9k^2 + 4} \times 9k + 36 = 0$.

$\therefore 9k^2 = 4, k = \pm \frac{2}{3}$ 11分

当直线 l 斜率不存在时, $E(0, \pm 1)$ 不合题意.

\therefore 所求直线 l 的方程为 $y = \pm \frac{2}{3}x + 1$12分

21. 解:(I) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

$\therefore f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ 2分

$\because x > 0$,

\therefore 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$.

\therefore 函数 $f(x)$ 单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$4分

(II) $\because x > 0, a > 0, \frac{e^x}{ex^a} = \ln e^x - \ln x^a = \ln \frac{e^x}{x^a}$,

令 $t = \frac{e^x}{x^a} > 0$, 则 $\frac{t}{e} = \ln t$.

令 $h(t) = \ln t - \frac{t}{e}$, 则 $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{e}$.

\therefore 当 $0 < t < e$ 时, $h'(t) > 0$; 当 $t > e$ 时, $h'(t) < 0$.

\therefore 函数 $h(t)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

$\because h(e) = 0$,

\therefore 方程 $\frac{t}{e} = \ln t$ 有唯一解 $t = e$.

\therefore 方程 $\frac{e^x}{ex^a} = x - a \ln x$ 有两个不等的实数解等价于方程 $e = \frac{e^x}{x^a}$ 有两个不相等的实数解.7分

等价于方程 $a \ln x = x - 1$ 有两个不相等的实数解.

构造函数 $k(x) = a \ln x - x + 1$, 则 $k'(x) = \frac{a}{x} - 1$.

$\because a > 0$,

\therefore 当 $0 < x < a$ 时, $k'(x) > 0$; 当 $x > a$ 时, $k'(x) < 0$.

\therefore 函数 $k(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递增, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递减.

$\because x \rightarrow 0^+, k(x) \rightarrow -\infty; x \rightarrow +\infty, k(x) \rightarrow -\infty$.

∴ 只需要 $k(a) = a \ln a - a + 1 > 0$, 即 $\ln a + \frac{1}{a} - 1 > 0$. ……9分

构造函数 $m(a) = \ln a + \frac{1}{a} - 1$, 则 $m'(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}$.

∴ 当 $0 < a < 1$ 时, $m'(a) < 0$; 当 $a > 1$ 时, $m'(a) > 0$.

∴ 函数 $m(a)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

∴ $m(1) = 0$,

∴ 当 $a \neq 1$ 时, $\ln a + \frac{1}{a} - 1 > 0$ 恒成立. ……11分

∴ a 的取值范围为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. ……12分

22. 解: (I) ∵ 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t \end{cases}$ (t 为参数),

∴ 曲线 C 的普通方程为 $y^2 = 3x$. ……2分

∴ 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = 3$,

∴ $\sqrt{3}\rho \sin\theta + \rho \cos\theta = 3$. ……3分

∴ $x = \rho \cos\theta, y = \rho \sin\theta$,

∴ 直线 l 的直角坐标方程为 $x + \sqrt{3}y - 3 = 0$. ……5分

(II) 由(I)知, 点 P 在直线 l 上,

∴ 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -3 - \frac{\sqrt{3}}{2}m \\ y = 2\sqrt{3} + \frac{1}{2}m \end{cases}$ (m 为参数), ……7分

代入 $y^2 = 3x$ 得, $m^2 + 14\sqrt{3}m + 84 = 0$.

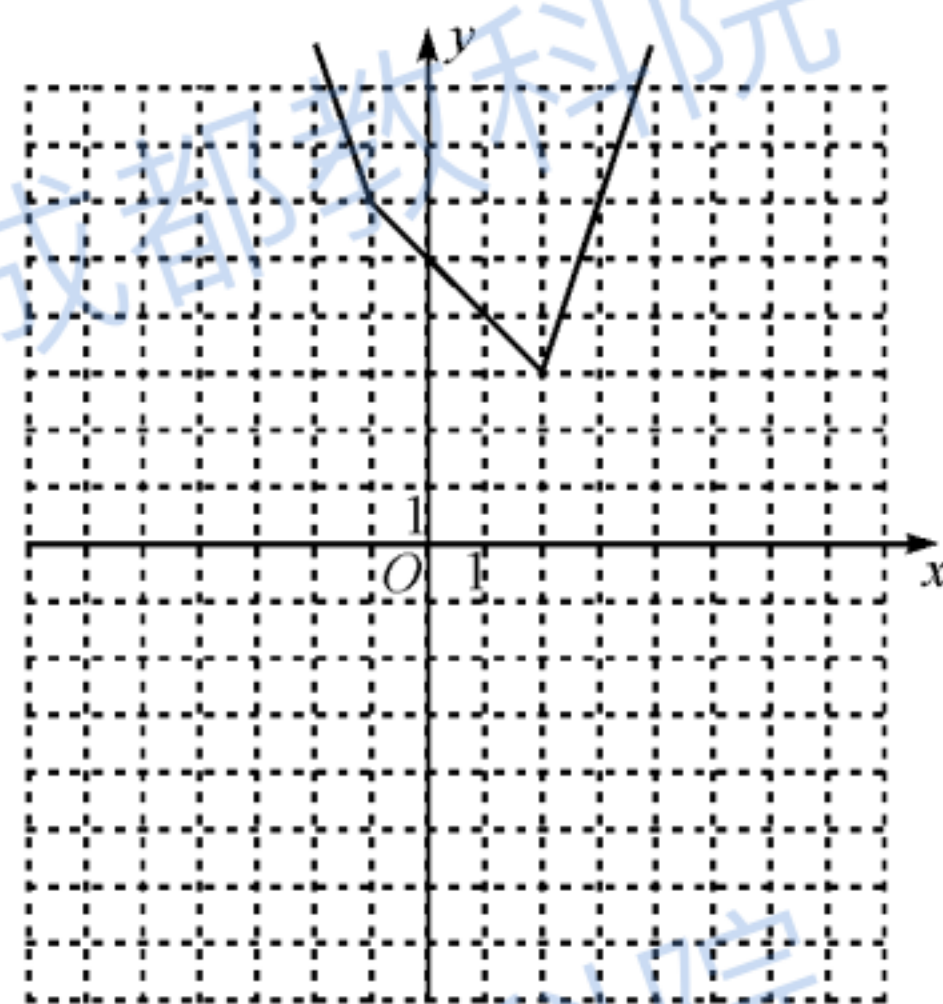
设 m_1, m_2 是上述方程的两根,

∴ $\Delta > 0, m_1 + m_2 = -14\sqrt{3}, m_1 m_2 = 84 > 0$. ……9分

∴ $|PA| + |PB| = |m_1| + |m_2| = |m_1 + m_2| = 14\sqrt{3}$. ……10分

23. 解: (I) 由题得, $f(x) = |x+1| + 2|x-2| = \begin{cases} -3x+3, & x \leq -1 \\ -x+5, & -1 < x < 2 \\ 3x-3, & x \geq 2. \end{cases}$ ……3分

函数 $y = f(x)$ 的图象为



……5分

(II) 函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 2 个单位长度后得到函数 $y = f(x+2)$ 的图象, $y = f(x)$ 的图象与 $y = f(x+2)$ 的图象如右图所示.

……7 分

当 $x \in (0, 2)$ 时, 由 $f(x+2) = f(x)$ 解得, $x = \frac{1}{2}$.

……9 分

由图象可知不等式 $f(x+2) > f(x)$ 的解集为

$(\frac{1}{2}, +\infty)$. ……10 分

