高一数学试题参考答案

1. A 【解析】本题考查集合的运算,考查数学运算的核心素养.

因为$U=\{1,2,3,4,5\}$,所以$A\cap(\complement_U B)=\{1\}$.

2. C 【解析】本题考查复数的运算,考查数学运算的核心素养.

$z=\frac{i^2}{2+3i}=\frac{-(2-3i)}{2^2+3^2}=-\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$.

3. D 【解析】本题考查平面向量的平行,考查数学运算的核心素养.

因为$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,所以$-2(m+15)=7(m^2-5)$,解得$m=-1$或$\frac{5}{7}$.

4. A 【解析】本题考查诱导公式与同角的三角函数的关系,考查数学运算的核心素养.

因为$\tan(\theta-3\pi)=\tan\theta=\frac{5}{2}$,所以$\frac{\sin(\pi+\theta)+\cos(\pi-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)+2\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}=\frac{-\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta+2\sin\theta}=\frac{-\tan\theta-1}{1+2\tan\theta}=\frac{-\frac{7}{2}}{6}=-\frac{7}{12}$.

5. C 【解析】本题考查函数模型的应用,考查数学建模的核心素养.

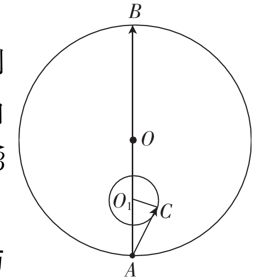
依题意可设$y=k[\frac{7^x}{x^3+3^x}]$,当$x=2$时,$y=k[\frac{49}{17}]=2k=6$,解得$k=3$,所以$y=3[\frac{7^x}{x^3+3^x}]$,则当$x=3$时,$y=3[\frac{343}{54}]=3\times6=18$,故第3天进店消费的人数为18.

6. C 【解析】本题考查充分必要条件的判定与三角恒等变换,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

若$|\tan\alpha|=\frac{1}{2}$,则$\tan\alpha=\pm\frac{1}{2}$.因为$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$,所以$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=3$或$\frac{1}{3}$,则$|\log_3\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})|=1$.反之亦成立.故“$|\tan\alpha|=\frac{1}{2}$”是“$|\log_3\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})|=1$”的充要条件.

7. B 【解析】本题考查投影向量,考查直观想象的核心素养.

如图,设大圆、小圆的圆心分别为O,O_1,小圆半径为r,大圆半径为R,则$R=6r$,因为AC与圆O_1相切,所以$O_1C\perp AC$,则$\overrightarrow{AO_1}$在$\overrightarrow{AC}$上的投影向量为$\overrightarrow{AC}$.因为$|\overrightarrow{AB}|=12r$,$|O_1A|=3r$,所以$|\overrightarrow{AB}|=4|O_1A|$,所以$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的投影向量为$4\overrightarrow{AC}$.



8. C 【解析】本题考查解三角形的实际应用,考查直观想象的核心素养与数据处理能力.

由余弦定理可得$AH=\sqrt{AB^2+BH^2-2AB\cdot BH\cdot\cos\angle ABH}=\sqrt{1600+400+1600\times0.31}=\sqrt{2496}=8\sqrt{39}$.依题意得$\angle QAH=48.24°$,则$\frac{QH}{AH}=\tan 48.24°=1.12$,所以$QH=1.12AH=8.96\sqrt{39}=8.96\times6.25=56$,则$PH\approx15+56=71$,故佛像全身高度约为71米.

9. AD **【解析】本题考查平面向量的垂直,考查数学的运算的核心素养.**

因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6+\lambda^2+\lambda=0$,解得 $\lambda=-3$ 或 2.

10. AC **【解析】本题考查复数的运算与共轭复数,考查数学运算的核心素养.**

设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$,因为 $z+2\bar{z}=3a-b\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$,所以 $a=\frac{1}{3}$,$b=-1$,A 正确,B 错误. $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2=\frac{10}{9}$,$5z+\bar{z}=2-4\mathrm{i}$,C 正确,D 错误.

11. ACD **【解析】本题考查解三角形,考查逻辑推理的核心素养.**

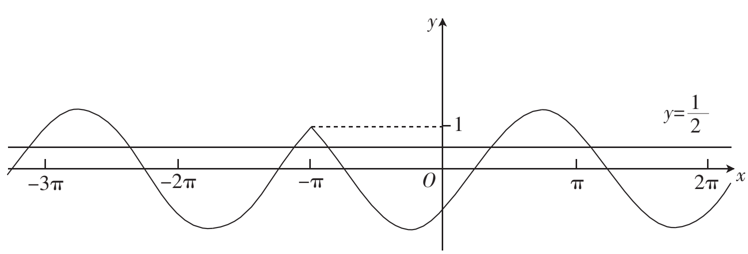
由 $a\cos B=b\cos A$,可得 $\sin A\cos B=\sin B\cos A$,则 $\sin(A-B)=0$,因为 $-\pi<A-B<\pi$,所以 $A-B=0$,即 $A=B$,所以$\triangle ABC$ 为等腰三角形,A 正确.

若 $B=\frac{\pi}{4}$,$c=\sqrt{2}$,$b=\frac{6}{5}$,则 $c\sin B=1<\frac{6}{5}<\sqrt{2}$,此时$\triangle ABC$ 有两解,B 错误.

若 $b\cos A+(a-2c)\cos B=0$,则 $\sin B\cos A+(\sin A-2\sin C)\cos B=0$,则 $\sin(B+A)=2\sin C\cos B$,即 $\sin C=2\sin C\cos B$,因为 $\sin C>0$,所以 $\cos B=\frac{1}{2}$,则 $B=\frac{\pi}{3}$,C 正确.

若$\triangle ABC$ 为锐角三角形,则 $A+B>\frac{\pi}{2}$,$A>\frac{\pi}{2}-B$,且 $A\in(0,\frac{\pi}{2})$,$\frac{\pi}{2}-B\in(0,\frac{\pi}{2})$,$a^2+b^2-c^2>0$,所以 $\sin A>\sin(\frac{\pi}{2}-B)=\cos B$,所以$(a^2+b^2-c^2)\sin A>(a^2+b^2-c^2)\cos B$,D 正确.

12. BC **【解析】本题考查三角函数的图象及其性质与函数的新概念,考查数学抽象与直观想象的核心素养.**



$$f(x)=\mathrm{sgn}(x+\pi)\sin x+\cos(x+\pi)=\begin{cases}-\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}),x<-\pi,\\1,x=-\pi,\\\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}),x>-\pi,\end{cases}$$

作出 $f(x)$的部分图象,如图所示,由图可知,$f(x)$不是周期函数,A 错误.

由图可知,$f(x)$在$[-2\pi,0]$上的最大值为 $f(-\pi)=1$,B 正确.

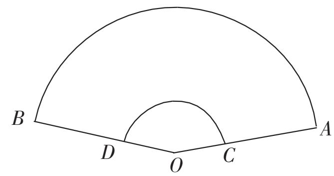
由图可知,$f(x)$的图象关于直线 $x=-\pi$ 对称,所以 $f(x-\pi)$是偶函数,C 正确.

令 $g(x)=2f(x)-1=0$,得 $f(x)=\frac{1}{2}$,由图可知,在$[-3\pi,2\pi]$上,$f(x)$的图象与直线 $y=\frac{1}{2}$ 只有 5 个交点,所以 $g(x)=2f(x)-1$ 在$[-3\pi,2\pi]$上有 5 个零点,D 错误.

13. $\cos(\frac{x}{4}+\frac{3}{4})$；$\cos(x+\frac{3}{4})$ **【解析】本题考查三角函数图象的变换，考查逻辑推理的核心素养.**

依题意可得 $f(x)=\cos(\frac{x+1}{4}+\frac{1}{2})=\cos(\frac{x}{4}+\frac{3}{4})$，$g(x)=\cos(\frac{x}{4}\times 4+\frac{3}{4})=\cos(x+\frac{3}{4})$.

14. 70 cm(未写单位不给分) **【解析】本题考查弧度制，考查直观想象与数学运算的核心素养.**



如图，设弧 AB 的长为 a cm，弧 CD 的长为 b cm. 因为该扇形的中心角的弧度数为2.7，所以 $a=2.7OA$，$b=2.7OC$，所以 $OA=\frac{a}{2.7}$，$OC=\frac{b}{2.7}$. 因为 $AC=OA-OC=\frac{a-b}{2.7}=\frac{50}{3}$，所以 $a-b=45$，又 $a+b=95$，解得 $a=70$，所以该扇环的外弧线长为 70 cm.

15. 1 **【解析】本题考查函数的奇偶性，考查数学抽象的核心素养.**

因为 $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}(2^x-2^{-x}+\frac{x^2-1}{x^2})=\frac{2x^2}{x^2-1}(2^x-2^{-x})+2$，

所以 $f(-x)=\frac{2x^2}{x^2-1}(2^{-x}-2^x)+2$，所以 $f(x)+f(-x)=4$，则 $f(a)+f(-a)=4$，

因为 $f(a)=3$，所以 $f(-a)=4-3=1$.

16. $[1,2)$ **【解析】本题考查平面向量的模与数量积，考查数学运算与逻辑推理的核心素养.**

当 $\lambda=0$ 时，由 $|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}|=\lambda$，得 $|\boldsymbol{a}|=0$，这与 $|\boldsymbol{a}|=2$ 矛盾，所以 $\lambda\neq 0$. 由 $|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}|=\lambda$，得 $|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}|^2=\lambda^2(\lambda>0)$，即 $|\boldsymbol{a}|^2=2\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}(\lambda>0)$，所以 $\lambda=\frac{2}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}$. 因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>1$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\leqslant 2$，所以 $1\leqslant\lambda<2$.

17. 解：(1) $z_1(2-\mathrm{i})=(1+m\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=2+m+(2m-1)\mathrm{i}$，…… 2 分

由 $z_1(2-\mathrm{i})$ 为纯虚数，得 $\begin{cases}2+m=0,\\2m-1\neq 0,\end{cases}$ …… 3 分

解得 $m=-2$. …… 4 分

所以 $|z_1|=\sqrt{1+m^2}=\sqrt{5}$. …… 5 分

(2) $z_2=z_1(n+\mathrm{i}^3)=(1-2\mathrm{i})(n-\mathrm{i})$ …… 6 分

$=n-2-(2n+1)\mathrm{i}$， …… 7 分

因为复数 z_2 在复平面内对应的点位于第三象限，

所以 $\begin{cases}n-2<0,\\-(2n+1)<0,\end{cases}$ …… 9 分

解得 $-\frac{1}{2}<n<2$，即 n 的取值范围是 $(-\frac{1}{2},2)$. …… 10 分

18. 解：(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sin^2\alpha-\cos\alpha\tan\alpha=\sin^2\alpha-\sin\alpha(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z})$， …… 2 分

因为 $\sin^2\alpha-\sin\alpha=(\sin\alpha-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$， …… 3 分

所以当 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 取得最小值 $-\frac{1}{4}$， …… 4 分

此时 α 的取值集合为$\{\alpha|\alpha=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ 或 $\alpha=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$. ………………………………… 6 分

(2)由 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{24}{7}$, ………………………………………………… 7 分

解得 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$或$\frac{4}{3}$, ……………………………………………………………… 8 分

因为 α 为锐角,所以 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$, ………………………………………………………… 9 分

所以 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\cos\alpha=\frac{3}{5}$. ……………………………………………………… 10 分

因为$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(0,-\tan\alpha-\cos\alpha)$, ……………………………………………… 11 分

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\cos\alpha(-\tan\alpha-\cos\alpha)=-\sin\alpha-\cos^2\alpha=-\frac{4}{5}-\frac{9}{25}=-\frac{29}{25}$. ………… 12 分

19. 解:(1)由图可知 $A=1$, ……………………………………………………………………… 1 分

由图可知 $f(x)=\tan\omega x$ 的最小正周期为$\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{|\omega|}$, ………………………………… 2 分

因为 $\omega>0$,所以 $\omega=2$. ……………………………………………………………………… 3 分

所以 $f(x)=\tan 2x$,$g(x)=\sin(2x+\varphi)$,因为 $g(x)$的图象经过点$(\frac{\pi}{3},0)$,

所以 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$, ………………………………………………………… 4 分

因为 $0<\varphi<\pi$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$, ………………………………………………………………… 5 分

所以 $g(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$. ………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)知 $g(2Ax)=\sin(4x+\frac{\pi}{3})$. ……………………………………………………… 7 分

令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 4x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$, ………………………………………… 10 分

得$\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$, …………………………………………… 11 分

所以函数 $y=g(2Ax)$的单调递减区间为$[\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}](k\in\mathbf{Z})$. ………… 12 分

20. 解:(1)因为$\overrightarrow{DE}=7\overrightarrow{EC}$,所以$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{7}{8}\overrightarrow{DC}=\frac{7}{8}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, ………… 2 分

因为$\overrightarrow{BF}=4\overrightarrow{FC}$,所以$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AD}$. ………… 4 分

(2)设$|\overrightarrow{AB}|=a$,$|\overrightarrow{AD}|=b$,因为 $\cos\angle BAD=\frac{1}{4}$,所以 $\sin\angle BAD=\frac{\sqrt{15}}{4}$, ………… 5 分

则四边形 $ABCD$ 的面积 $S=ab\sin\angle BAD=\frac{\sqrt{15}}{4}ab=2\sqrt{15}$,解得 $ab=8$. ………… 6 分

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=ab\cos\angle BAD=\frac{1}{4}ab=2.$ ·· 7 分

所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=(\frac{7}{8}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AD})=\frac{7}{8}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{4}{5}|\overrightarrow{AD}|^2+\frac{17}{10}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$·········

·· 8 分

$=\frac{7}{8}a^2+\frac{4}{5}b^2+\frac{17}{5}\geqslant 2\sqrt{\frac{7}{8}a^2\cdot\frac{4}{5}b^2}+\frac{17}{5}=\frac{\sqrt{70}}{5}ab+\frac{17}{5}=\frac{17+8\sqrt{70}}{5}$,··················· 9 分

当且仅当$\frac{7}{8}a^2=\frac{4}{5}b^2$,即 $a=\frac{4\sqrt{70}}{35}b$ 时,等号成立, ································ 10 分

所以$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{AE}\cdot(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CF})=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{FA}=-\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}\leqslant-\frac{17+8\sqrt{70}}{5}$,

故$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{FC}\cdot\overrightarrow{EA}$的最大值为$-\frac{17+8\sqrt{70}}{5}$. ······································ 12 分

21. 解:(1)依题意可得方程 $1-\log_2(ax+1)=0$ 在$[1,2]$内只有一个实数解, ·············· 1 分

即 $ax+1=2$ 在$[1,2]$内只有一个实数解,··· 2 分

所以 $a=\frac{1}{x}\in[\frac{1}{2},1]$, ··· 4 分

所以 a 的取值范围为$[\frac{1}{2},1]$. ··· 5 分

(2)因为 $f(x)=\frac{1}{4}\lg x$,所以当 $t_2\in[\frac{1}{10},10]$时,$f(t_2)\in[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$,······················ 6 分

则 $D[f(t_2)]=\frac{1}{4}-(-\frac{1}{4})=\frac{1}{2}$. ·· 7 分

因为 $a=2$,所以 $\varphi(x)=g(x)-\log_2 x=\log_2\frac{2x+1}{x}=\log_2(2+\frac{1}{x})$在$[1,t_1]$上为减函数, ···

·· 8 分

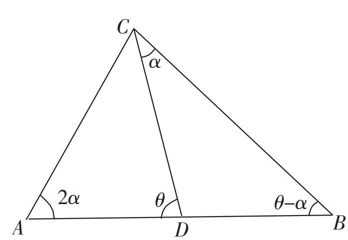
所以 $\varphi(x)$在$[1,t_1]$上的最大值为 $\varphi(1)=\log_2 3$,最小值为 $\varphi(t_1)=\log_2(2+\frac{1}{t_1})$, ········· 9 分

所以当 $x\in[1,t_1]$时,$D[\varphi(x)]=\log_2 3-\log_2(2+\frac{1}{t_1})=\log_2\frac{3t_1}{2t_1+1}$, ·············· 10 分

由 $D[\varphi(x)]>D[f(t_2)]$,得 $\log_2\frac{3t_1}{2t_1+1}>\frac{1}{2}$,即$\frac{3t_1}{2t_1+1}>\sqrt{2}$, ······················ 11 分

解得 $t_1>4+3\sqrt{2}$,故 t_1 的取值范围为$(4+3\sqrt{2},+\infty)$. ······························· 12 分

22. 解:设$\angle BCD=\alpha$,$\angle ADC=\theta$,则$\angle CAD=2\alpha$,$\angle BDC=\pi-\theta$,
$\angle ABC=\theta-\alpha$.



(1)因为 $AD=1$,$BC=2$,所以 $BC=AB=2$, ·············· 1 分

所以$\angle BCA=\angle CAB=2\alpha$,所以$\angle ACD=2\alpha-\alpha=\alpha$,······ 2 分

所以$\angle BCD=\angle ACD$,又 CD 为$\triangle ABC$ 中 AB 边上的中线,所以 $AC=BC$,·· 3 分

则△ABC为正三角形，所以 $CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=\sqrt{3}$. …………………………………………… 4 分

(2)依题意可得 $CD=\sqrt{2}$，设 $AC=x$，$BC=y$，由余弦定理得 $\cos\theta=\frac{3-x^2}{2\sqrt{2}}=-\frac{3-y^2}{2\sqrt{2}}$， ……

…………………………………………………………………………………………………… 6 分

整理得 $x^2+y^2=6$，即 $AC^2+BC^2=6$. …………………………………………………………… 7 分

由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin\alpha}=\frac{BC}{\sin(\pi-\theta)}$，$\frac{CD}{\sin 2\alpha}=\frac{AC}{\sin\theta}$， …………………………………………… 8 分

即 $\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{y}{\sin\theta}$，$\frac{\sqrt{2}}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{x}{\sin\theta}$，整理得 $y=\sqrt{2}x\cos\alpha$， …………………………………… 9 分

则 $x^2+y^2=(1+2\cos^2\alpha)x^2=(\cos 2\alpha+2)x^2=6$，则 $\cos 2\alpha=\frac{6}{x^2}-2$. ………………… 10 分

由余弦定理得 $\cos 2\alpha=\frac{1+x^2-2}{2x}$，则 $\frac{1+x^2-2}{2x}=\frac{6}{x^2}-2$， ………………………………… 11 分

整理得 $x^3+4x^2-x=12$，即 $AC^3+4AC^2-AC=12$. ……………………………………… 12 分