数学试题参考答案

1. C　存在量词命题的否定为全称量词命题.

2. C　选项 A,$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,$g(t)$的定义域为$[0,+\infty)$,不是同一个函数. 选项 B,$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$g(t)$的定义域为 $\mathbf{R}$,不是同一个函数. 选项 C,$f(x)$与 $g(t)$的定义域均为 $\mathbf{R}$,且$\frac{t^4-1}{t^2+1}=t^2-1$,所以 $f(x)$与 $g(t)$是同一个函数. 选项 D,$f(x)$与 $g(t)$的对应关系不同,不是同一个函数.

3. B　若 $a\geqslant 0$,则 $f(a)=2a-1=3$,解得 $a=2$;若 $a<0$,则 $f(a)=a^2+4a+3=3$,解得 $a=-4$ 或 $a=0$(舍去).

4. D　由题可知,这个班既参加了体育活动,又参加了科学活动的同学有 $25+15+10-40=10$ 名.

5. A　由 $a+\frac{2}{a}>3$,得 $a>2$ 或 $0<a<1$,故“$a>2$”是“$a+\frac{2}{a}>3$”的充分不必要条件.

6. D　由$(a-1)(b-2)=2$,得 $ab-2a-b=0$,则$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$,则 $8a+b=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)(8a+b)=10+\frac{b}{a}+\frac{16a}{b}\geqslant 10+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{16a}{b}}=18$,当且仅当 $a=\frac{3}{2}$,$b=6$ 时,等号成立,故 $8a+b$ 的最小值为 18.

7. C　因为 $y=f(3x+1)$的定义域为$[0,2]$,所以在 $y=f(3x+1)$中,有 $0\leqslant x\leqslant 2$,则 $1\leqslant 3x+1\leqslant 7$,则在 $y=f(\sqrt{x-1})$中,有 $1\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant 7$,解得 $2\leqslant x\leqslant 50$,故 $y=f(\sqrt{x-1})$的定义域为$[2,50]$.

8. D　$\frac{2x}{x-y}-\frac{8y}{x+y}=\frac{(x+y)+(x-y)}{x-y}-\frac{4(x+y)-4(x-y)}{x+y}=\frac{x+y}{x-y}+\frac{4(x-y)}{x+y}-3$. 因为 $x>y>0$,所以$\frac{x+y}{x-y}+\frac{4(x-y)}{x+y}\geqslant 4$,当且仅当 $x=3y$ 时,等号成立. 故$\frac{2x}{x-y}-\frac{8y}{x+y}$的最小值为 1.

9. AD　因为 $M=\{1,2,3,4,5\}$,$N=\{1,3,5,7\}$,$P=\{2,4,6,8\}$,所以 $M-N=\{2,4\}$,$M-P=\{1,3,5\}$,$M-(M-N)=\{1,3,5\}$,$(N-P)-M=\{7\}$,故选 AD.

10. ABC　因为 $-1\leqslant x+y\leqslant 2$,$1\leqslant 2x-y\leqslant 5$,所以 $0\leqslant x+y+2x-y=3x\leqslant 7$,则 $0\leqslant x\leqslant\frac{7}{3}$. 故选 ABC.

11. ACD　因为关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为$(1,2)$,所以$\begin{cases}a>0,\\a+b+c=0,\\4a+2b+c=0,\end{cases}$ 整理得$\begin{cases}b=-3a,\\c=2a,\end{cases}$则 $b+c=-a<0$. $ax^2+cx+b=ax^2+2ax-3a=a(x^2+2x-3)<0$,解得 $-3<$

$x<1.c^3+bc+a=8a^3-6a^2+a\leqslant 0$，即 $8a^2-6a+1\leqslant 0$，解得$\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$，则 $a+b+2c=2a\leqslant 1$. 故选 ACD.

12. $<$　因为$(2\sqrt{2}+1)^2=9+4\sqrt{2}$，$(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2=9+6\sqrt{2}$，所以 $2\sqrt{2}+1<\sqrt{3}+\sqrt{6}$，则 $2\sqrt{2}-\sqrt{6}<\sqrt{3}-1$.

13. $(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$　由"$\forall x\in[1,3]$，$mx+3-2m>0$"是假命题，得"$\exists x\in[1,3]$，$mx+3-2m\leqslant 0$"，则 $m+3-2m\leqslant 0$ 或 $3m+3-2m\leqslant 0$，解得 $m\geqslant 3$ 或 $m\leqslant -3$.

14. $\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)$　令 $x=y=-\frac{1}{2}$，则 $f(-1)=f\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=0$. 令 $y=-1$，则 $f(x-1)=f(x)\cdot f(-1)+x=x$，则 $f(x)=x+1$. 由 $f(x^2+ax)\geqslant 2$ 在$[1,2]$上有解，得 $x^2+ax-1\geqslant 0$ 在$[1,2]$上有解. 令 $g(x)=x^2+ax-1$，则 $g(x)$在$[1,2]$上的最大值为 $g(1)$或 $g(2)$，则 $1+a-1\geqslant 0$ 或 $4+2a-1\geqslant 0$，解得 $a\geqslant -\frac{3}{2}$.

15. 解：(1)若 $a-1=0$，即 $a=1$，则 $B=\{0\}$，符合题意. ………………………………… 2 分

若 $a-1\neq 0$，即 $a\neq 1$，则由 B 中恰有一个元素，得 $a^2-4(a-1)^2=0$， ……………… 3 分

解得 $a=2$ 或 $a=\frac{2}{3}$. ………………………………………………………………… 5 分

综上所述，a 的值构成的集合为$\left\{1,2,\frac{2}{3}\right\}$. …………………………………………… 6 分

(2)由 $x+\frac{4}{x}=5$，得 $x=1$ 或 $x=4$，则 $A=\{1,4\}$. ………………………………… 7 分

若 $B=\varnothing$，符合 $B\subseteq A$，

则$\begin{cases}a-1\neq 0,\\ a^2-4(a-1)^2<0,\end{cases}$解得 $a<\frac{2}{3}$或 $a>2$. …………………………………………… 9 分

若 $1\in B$，则 $3a-2=0$，解得 $a=\frac{2}{3}$，则 $B=\{1\}$，符合 $B\subseteq A$. …………………… 10 分

若 $4\in B$，则 $21a-17=0$，解得 $a=\frac{17}{21}$，则 $B=\left\{4,\frac{1}{4}\right\}$，不符合 $B\subseteq A$. ……………… 12 分

综上所述，a 的取值范围为$\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]\cup(2,+\infty)$. ……………………………… 13 分

16. 解：设每间花室与墙体垂直的围墙的边长为 a 米，与墙体平行的围墙的边长为 b 米. ……
………………………………………………………………………………………… 1 分

(1)因为栅栏的总长为 120 米，所以 $3a+2b\leqslant 120$， ………………………………… 2 分

其中 $0<a<40$，$0<b<60$，则 $a\leqslant\frac{120-2b}{3}$. ………………………………………… 3 分

每间花室的面积 $S=ab\leqslant\frac{(120-2b)b}{3}$. …………………………………………… 4 分

因为$\frac{(120-2b)b}{3}=-\frac{2}{3}(b^2-60b)=-\frac{2}{3}(b-30)^2+600\leqslant 600$，…………………… 6 分

当且仅当 $a=20, b=30$ 时,等号成立，…………………………………………………………… 7 分

所以每间花室面积的最大值为 600 平方米. ………………………………………………………… 8 分

(2)因为每间花室的面积为 150 平方米,所以 $ab=150$,则 $b=\frac{150}{a}$. …………………… 10 分

栅栏的总长 $l=3a+2b=3a+\frac{300}{a}\geqslant 2\sqrt{3a\cdot\frac{300}{a}}=60$， …………………………… 13 分

当且仅当 $a=10, b=15$ 时,等号成立,……………………………………………………………… 14 分

故栅栏总长的最小值为 60 米. ……………………………………………………………………… 15 分

17.(1)证明:$\frac{a}{a+c}-\frac{b}{b+c}=\frac{a(b+c)}{(a+c)(b+c)}-\frac{b(a+c)}{(a+c)(b+c)}=\frac{c(a-b)}{(a+c)(b+c)}$. …………… 2 分

因为 $a>b>0, c>0$,所以 $a-b>0, a+c>0, b+c>0$，…………………………………………… 4 分

从而$\frac{c(a-b)}{(a+c)(b+c)}>0$,即$\frac{a}{a+c}>\frac{b}{b+c}$. ………………………………………………… 6 分

(2)解:$x^2+(a-2)x+a-3=(x+1)(x+a-3)$. ……………………………………………… 8 分

令$(x+1)(x+a-3)=0$,得 $x=-1$ 或 $x=3-a$. ………………………………………………… 9 分

若 $0<a<4$,则$-1<3-a$,不等式的解集为$(-1,3-a)$;………………………………………… 11 分

若 $a=4$,则$-1=3-a$,不等式的解集为$\varnothing$; …………………………………………………… 13 分

若 $a>4$,则$-1>3-a$,不等式的解集为$(3-a,-1)$. ………………………………………… 15 分

18.解:(1)令 $x=0$,得 $f(0)-2f(0)=\frac{1}{4}$,………………………………………………………… 1 分

则 $f(0)=-\frac{1}{4}$. ………………………………………………………………………………… 2 分

(2)由 $f(x)-2f(-x)=\frac{3x+1}{x^2+4}$,①

得 $x\in\mathbf{R}$，………………………………………………………………………………………… 3 分

且 $f(-x)-2f(x)=\frac{3\times(-x)+1}{(-x)^2+4}=\frac{-3x+1}{x^2+4}$,② …………………………………………… 5 分

①$+2\times$②,得$-3f(x)=\frac{3x+1}{x^2+4}+\frac{-6x+2}{x^2+4}=\frac{-3x+3}{x^2+4}$,……………………………… 7 分

从而 $f(x)=\frac{x-1}{x^2+4}, x\in\mathbf{R}$. …………………………………………………………………… 8 分

(3)由(1)可知,当 $x=1$ 时,$f(x)=0$. …………………………………………………………… 9 分

当 $x\neq 1$ 时,$f(x)=\frac{x-1}{x^2+4}=\frac{x-1}{(x-1)^2+2(x-1)+5}=\frac{1}{x-1+\frac{5}{x-1}+2}$. ………… 10 分

若 $x>1$,则 $x-1>0, x-1+\frac{5}{x-1}\geqslant 2\sqrt{5}$,当且仅当 $x=1+\sqrt{5}$ 时,等号成立, ········ 11 分

从而 $0<\frac{1}{x-1+\frac{5}{x-1}+2}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{5}+2}=\frac{\sqrt{5}-1}{8}$. ································ 13 分

若 $x<1$,则 $x-1<0, -(x-1)+\frac{5}{-(x-1)}\geqslant 2\sqrt{5}$,当且仅当 $x=1-\sqrt{5}$ 时,等号成立, ··· ··· 14 分

则 $x-1+\frac{5}{x-1}\leqslant -2\sqrt{5}$,从而 $\frac{1}{-2\sqrt{5}+2}=\frac{-1-\sqrt{5}}{8}\leqslant\frac{1}{x-1+\frac{5}{x-1}+2}<0$. ··········· 16 分

综上所述,$f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{8},\frac{\sqrt{5}-1}{8}\right]$. ································ 17 分

19. 解:(1)因为 $A_k=\{y\mid y=x^2-2x+k\}=[k-1,+\infty)$, ······························ 1 分

所以 $A_{k+1}\subseteq A_k, k=1,2,\cdots,n-1$, ·· 3 分

则 $\bigcap\limits_{k=1}^{5}A_k=A_5=\{y\mid y=x^2-2x+5\}=[4,+\infty)$, ·· 5 分

$\bigcup\limits_{k=1}^{5}A_k=A_1=[0,+\infty)$. ·· 7 分

(2)因为 $A_k=\{y\mid y=x^2-2kx+2k^2-2k-99\}=[k^2-2k-99,+\infty)$, ··············· 8 分

所以 $A_{k+1}\subseteq A_k, k=1,2,\cdots,n-1$,则 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k=A_n=[n^2-2n-99,+\infty)$. ············· 10 分

又 $B_k=\{y\mid y=-x^2+2kx-2k^2+10k\}=(-\infty,-k^2+10k]$, ··························· 11 分

所以当 $n<5$ 时,$\bigcup\limits_{k=1}^{n}B_k=(-\infty,-n^2+10n]$;当 $n\geqslant 5$ 时,$\bigcup\limits_{k=1}^{n}B_k=(-\infty,25]$. ········· 13 分

若 $n<5$,则由 $(\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k)\cap(\bigcup\limits_{k=1}^{n}B_k)\neq\varnothing$,可得 $n^2-2n-99\leqslant -n^2+10n$,不等式恒成立. ······ ··· 14 分

若 $n\geqslant 5$,则由 $(\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k)\cap(\bigcup\limits_{k=1}^{n}B_k)\neq\varnothing$,可得 $n^2-2n-99\leqslant 25$,解得 $5\leqslant n\leqslant 1+5\sqrt{5}$. ········ ··· 16 分

因为 $12<1+5\sqrt{5}<13$,且 $n\in\mathbf{N}^*$,所以 n 的最大值为 12. ······························ 17 分