高 20 级数学十二月考题

一、选择题：（共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1.集合 $A=\{-1,0\},B=\{0,1\},C=\{1,2\}$，则 $(A\cap B)\cup C=$　　　　（ C ）

A．$\varnothing$　　B. {1}　　C．{0,1,2}　　D. {-1,0,1,2}

2．下列各组函数中，与 $y=x$ 表示同一个函数的是　　　　（ B ）

A．$y=\left(\sqrt{x}\right)^2$　　B．$y=\sqrt[3]{x^3}$ C．$y=\sqrt{x^2}$　　D．$y=\dfrac{x^2}{x}$

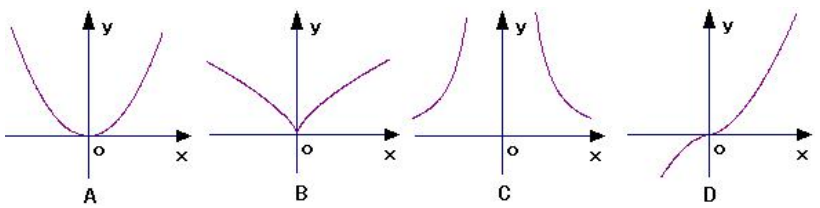
3.函数 $f(x)=\ln(x+2)+\dfrac{1}{x}$ 的定义域为　　　　（ C ）

A．$\{x|x>-2\}$　　B. $\{x|x\neq 0\}$　　C. $\{x|-2<x<0\text{或}x>0\}$　　D. $\{x|x>0\}$

4.设 $a=0.7^{\frac{1}{2}}$，$b=0.8^{\frac{1}{2}}$，$c=\log_3 0.7$，则 a,b,c 之间的大小关系是　（ B ）

A．$c<b<a$　　B．$c<a<b$　　C．$a<b<c$　　D．$b<a<c$

5．函数 $y=x^{\frac{4}{3}}$ 的图象是　　　　（ A ）



6.按复利计算，存入银行 5 万元，年利率 2 %， 3 年后支取，可得利息（ C ）万元

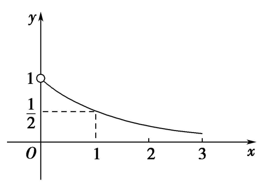
A. $5(1+0.02)^3$　　B. $5(1+0.02)^2$　　C. $5(1+0.02)^3-5$　　D. $5(1+0.02)^2-5$

7．方程 $4x^3-5x+6=0$ 的根所在的区间为　　　　（ B ）

A．$(-3,-2)$　　B．$(-2,-1)$　　C．$(-1,0)$　　D．$(0,1)$

8.已知奇函数 $y=\begin{cases} f(x), & x>0 \\ g(x), & x<0 \end{cases}$，若 $f(x)=a^x(a>0，a\neq 1)$对应的图象如图所示，则 $g(x)=$（ D ）

A. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}$　　B．$-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$　　C．2^{-x}　　D．-2^{x}



由图知，当 $x>0$ 时，函数 $f(x)$单调递减，则 $0<a<1$，$\because f(1)=\dfrac{1}{2}$，$\therefore a=\dfrac{1}{2}$，即函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(-x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}=-f(x)$，即 $g(x)=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}=-2^x$，故 $g(x)=-2^x$，$x<0$，

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} a^x, & (x<0) \\ (a-3)x+4a, & (x\geq 0) \end{cases}$，满足对任意的都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 成立，则 a 的取值范围是　　　　（ A ）

A. $(0,\frac{1}{4}]$　　B. $(0,1)$　　C. $[\frac{1}{4},1)$　　D. $(0,3)$

10．若 $f(x)=\lg(x^2-2ax+1+a)$ 在区间 $(-\infty,1]$ 上递减，则 a 的取值范围为（D ）

A. $[1,2]$　　B. $[2,+\infty)$　　C. $[1,+\infty)$　　D. $[1,2)$

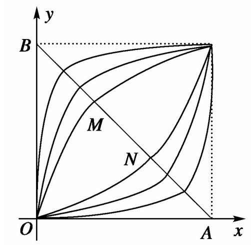
解：设 $g(x)=x^2-2ax+1+a$，则 $\begin{cases} a\geq 1 \\ g(1)>0 \end{cases}$ 所以 $1\leq a<2$

11.设函数 $f(x)=\ln(1+|x|)-\dfrac{1}{1+x^2}$,则使得 $f(x)>f(2x-1)$ 成立的 x 的取值范围是（ A ）

A．$\left(\dfrac{1}{3},1\right)$　　B．$\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$　　C．$\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$　　D．$\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$

12．幂函数 $y=x^m(m\neq 0)$，当 m 取不同的正数时，在区间 $[0,1]$ 上它们的图象是一簇美丽的曲线(如图)．设点 $A(1,0),B(0,1)$，连结 AB，线段 AB 恰好被其中的两个幂函数 $y=x^\alpha$，$y=x^\beta$ 的图象三等分，即有 $BM=MN=NA$. 则 $\alpha\beta=$（ D ）

A．4　　B．3　　C．2　　D．1



不妨设 $y=x^\alpha$，$y=x^\beta$ 分别过 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$，$(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$，则 $\dfrac{2}{3}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^\alpha,\dfrac{1}{3}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^\beta$ $\dfrac{2}{3}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\alpha\beta}$ 则 $\alpha\beta=1$

二．填空题：（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．函数 $y=a^{(x-4)}+6$ 的图象恒过点 __(4, 7)__

14.．函数 $f(x)=(x-1)(x^2+3x-10)$的零点有______个.

解：$\because f(x)=(x-1)(x^2+3x-10)=(x-1)(x+5)(x-2)$，$\therefore$ 由 $f(x)=0$ 得 $x=-5$ 或 1 或 2.答案：3

15．已知正方形的周长为 x，它的外接圆的半径为 y，则 y 关于 x 的解析式为__________

解：外接圆直径是正方形对角线，边长为 $\dfrac{x}{4}$，勾股定理得 $(2y)^2=\left(\dfrac{x}{4}\right)^2+\left(\dfrac{x}{4}\right)^2$ $\therefore y^2=\dfrac{x^2}{32}$ 即 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x(x>0)$.

16．已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & (x<1) \\ \log_{\frac{1}{2}} x, & (x\geq 1) \end{cases}$，若关于 x 的方程 $f(x)=k$ 有三个不同的实根，则实数 k 的取值范围是 __(-1,0)__

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	C	B	A	C	B	D	A	D	A	D

13. $\underline{(4,7)}$；　**14.** $\underline{\ 3\ }$；　**15.** $\underline{y=\frac{\sqrt{2}}{8}x(x>0)}$；　**16.** $\underline{(-1,0)}$

三、简答题：（本题共 6 个大题，17 题 10 分，其余每题 12 分共 70 分，请写出详细的解题过程）

17.(10 分)计算

（1）$\sqrt[3]{\left(-\frac{5}{4}\right)^3}+\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}+\left(\sqrt{5}-2\right)^{-1}+\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$ ；（2）$\dfrac{\lg 5\cdot\lg 8000+(\lg 2^{\sqrt{3}})^2}{\lg 600-\frac{1}{2}\lg 36-\frac{1}{2}\lg 0.01}$

解：(1)原式$=-\frac{5}{4}+\left(\frac{2}{3}\right)^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}+\sqrt{5}+2+\pi-3=-\frac{5}{4}+\frac{9}{4}+\sqrt{5}+2+\pi-3=\sqrt{5}+\pi$………5 分

（2）原式$=\dfrac{\lg 5(3+3\lg 2)+3(\lg 2)^2}{(\lg 6+2)-\lg 6+1}=\dfrac{3\lg 5+3\lg 2(\lg 5+\lg 2)}{3}=\dfrac{3}{3}=1$…………… 10 分

18.（12 分）设全集为 U=R，集合 A=（－∞，－3]∪[6，+∞），B={x|log$_2$（x+2）＜4}．
求（1）A∩C$_R$B；（2）已知 C={x|2a＜x＜a+1}，若 C⊆B，求实数 a 的取值范围．

(1) 由题得 $B=(-2,14)$，$C_RB=(-\infty,-2]\cup[14,+\infty)$……………… 4 分

A∩C$_R$B=（－∞，－3]∪[14，+∞）……………… 6 分

（2）∵C={x|2a＜x＜a+1}，∴①2a≥a+1，即 a≥1 时，C=∅，成立；……… 8 分

②2a＜a+1，即 a＜1 时，C=（2a，a+1）⊆（－2，14），

则$\begin{cases}a+1\leqslant 14\\2a\geqslant -2\end{cases}$，解得－1≤$a$＜1．……………… 11 分

综上所述，a 的取值范围为[－1，+∞）………………12 分

19.（12 分）（1）对于函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(-ax^2+6ax+a+8)$，若函数定义域为 R，求实数 a 的取值范围；

（2）已知定义在 R 上的函数 $f(x)$满足:①$f(x+y)=f(x)+f(y)+1$,②当 $x>0$ 时，$f(x)>-1$
求 $f(0)$的值，并证明 $f(x)$在 R 上是单调增函数;

解：（1）当 $a=0$ 时成立………………2 分

当 $a\neq 0$ 时$\begin{cases}-a>0\\\Delta<0\end{cases}$,解得 $-\frac{4}{5}<a<0$………………5 分

综上得，$-\frac{4}{5}<a\leq 0$……………… 6 分

(2)令 $x=y=0$，得 $f(0)=-1$. ……………………………………（8 分）

在 R 上任取 $x_1>x_2$，则 $x_1-x_2>0$，$f(x_1-x_2)>-1$.

又 $f(x_1)=f[(x_1-x_2)+x_2]=f(x_1-x_2)+f(x_2)+1>f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$在 R 上是单调增函数. ……………………………………（12 分）

20.已知函数 $f(x)=2^x$ 的定义域是[0，3]，设 $g(x)=f(2x)-f(x+2)$．

（1）求 $g(x)$ 的解析式及定义域；（2）求函数 $g(x)$ 的最大值和最小值.

(1)∵$f(x)=2^x$，∴$g(x)=f(2x)-f(x+2)=2^{2x}-2^{x+2}$．……………… 3 分

因为$f(x)$的定义域是$[0,3]$，所以$\begin{cases}0\le 2x\le 3\\0\le x+2\le 3\end{cases}$得$0\le x\le 1$.

于是 $g(x)$的定义域为$\{x|0\le x\le 1\}$．………………6 分

（2）设$g(x)=(2^x)^2-4\times 2^x=(2^x-2)^2-4$． ………………8 分

∵$x\in[0,1]$，即$2^x\in[1,2]$，∴当$2^x=2$即$x=1$时，$g(x)$取得最小值-4；………10 分

当$2^x=1$即$x=0$时，$g(x)$取得最大值-3．…………………………………12 分

21.（12 分）已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象经过点 $(2,4)$，对于偶函数 $y=g(x),(x\in R)$，当 $x\geq 0$ 时，$g(x)=f(x)-2x$．

（1）求函数 $y=f(x)$ 的解析式；

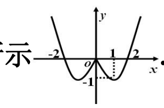
（2）求当 $x<0$ 时，函数 $y=g(x)$ 的解析式，并画出函数 $y=g(x)$ 的图象；

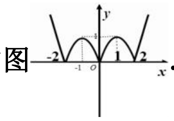
（3）写出函数 $y=|g(x)|$ 的单调递减区间．

解：(1)设$y=f(x)=x^\alpha$，代入点$(2,4)$，得$4=2^\alpha$，∴$\alpha=2$，∴$f(x)=x^2$；…… 2 分

(2)∵$f(x)=x^2$，∴当$x\ge 0$时$g(x)=x^2-2x$设$x<0$，则$-x>0$，∵$y=g(x)$是R上的偶函数

∴$g(x)=g(-x)=(-x)^2-2(-x)=x^2+2x$……………… 5 分

即当$x<0$时，$g(x)=x^2+2x$，图象如右图所示……………… 8 分

(3)函数$y=|g(x)|$的图象如图……………… 10 分

由图象知，函数$y=|g(x)|$的单调递减区间是：$(-\infty,-2]$，$[-1,0]$，$[1,2]$ …… 12 分

22.（12 分）设函数 $f(x)=ax^2+bx+1$（a,b 为实数），$F(x)=\begin{cases}f(x) & (x>0)\\-f(x) & (x<0)\end{cases}$.

（1）若 $f(-1)=0$，且对任意实数 x 均有 $f(x)\geq 0$ 成立，求 $F(x)$ 表达式；

（2）在（1）的条件下,当 $x\in[-2,2]$时，$g(x)=f(x)-kx$是单调函数,求 k 的取值范围

（3）设 $m>0,n<0$ 且 $m+n>0,a>0$ 且 $F(x)$ 为奇函数，求证：$F(m)+F(n)>0$．

解：（1）∵ $f(-1)=0$，∴$b=a+1$，……………1 分

由 $f(x)\geq 0$ 恒成立，知 $\Delta=b^2-4a=(a+1)^2-4a=(a-1)^2\leq 0$ ∴ $a=1$，………3 分

从而 $f(x)=x^2+2x+1$，　∴F(x)=$\begin{cases}(x+1)^2 & (x>0)\\-(x+1)^2 & (x<0)\end{cases}$，……………5 分

（2）由（1）可知 $f(x)=x^2+2x+1$ ∴ $g(x)=f(x)-kx=x^2+(2-k)x+1$，

由于 $g(x)$ 在$[-2,2]$上是单调函数,知$-\frac{2-k}{2}\leq -2$或$-\frac{2-k}{2}\geq 2$，……………7 分

得 $k\leq -2$ 或 $k\geq 6$……………8 分

（3）∵ $F(x)$是奇函数，∴ $F(-x)=-F(x)$，即当 $x>0$ 时 $F(-x)=-f(-x)=-f(x)=-F(x)$

当 $x<0$时，$-x>0$，$F(-x)=f(-x)=f(x)=-F(x)$ ∴ $f(x)$ 是偶函数∴ $b=0$…10 分

而 $a>0$，∴ $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上为增函数，∴ $F(x)$ 在$[0,+\infty)$上为增函数，………11 分

∵ $m>0,n<0$，由 $m>-n>0$，知 $F(m)>F(-n)$，

∴ $F(m)>-F(n)$，∴ $F(m)+F(n)>0$…………………12 分