

高三数学试卷

注意事项:

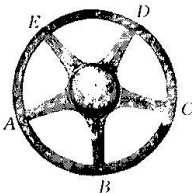
1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再涂选其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 样本数据 1, 3, 5, 4, 2 的中位数是
A. 1 B. 2 C. 3 D. 5
2. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{1, 2\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$
3. 复数 $z = \frac{6-i}{1+i}$ 在复平面内对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
4. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_6 = S_3$, $a_1 = 1$, 则 $a_2 =$
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. 1 D. 2
5. 若 $\tan(\alpha + \beta) = -1$, $\tan(\alpha - \beta) = 1$, 则 $\tan \beta =$
A. 0 B. 1 C. -1 D. 1 或 -1
6. 一种质量为 1 kg 的物质, 在化学分解中, 经过时间 t (单位: min) 后, 所剩的质量 m (单位: kg) 与时间 t 的函数关系为 $m = a^{kt}$ (a, k 均为参数, $a > 0$ 且 $a \neq 1$). 已知 1 kg 的该物质, 在化学分解中, 经过 t_1 min 后, 所剩的质量为 0.5 kg, 再经过 t_2 min 后, 所剩的质量为 0.25 kg, 则
A. $t_1 = t_2$ B. $t_1 = 2t_2$ C. $t_1 = 4t_2$ D. $t_1 = \frac{1}{2}t_2$

7. 青铜太阳轮, 出土于三星堆, 距今已有 3 000 多年历史, 其状若车轮, 现存于三星堆博物馆。如图, 该青铜太阳轮圆周上有 5 个孔, 可看成 5 个点, 记为 A, B, C, D, E , 五边形 $ABCDE$ 为正五边形, $AB = 25$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} =$

- A. 312.5 B. 625
C. 1 250 D. $625\cos 36^\circ$



8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , A 为 C 上一点, 直线 AF_2 与 C 交于另一点 B , 若 $\overrightarrow{AF_2} = 3\overrightarrow{F_2B}$, $|OF_1| = |OA|$, 则 C 的离心率为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分。

9. 在下列区间中, 函数 $f(x) = \frac{2}{\sin x}$ 单调递增的是

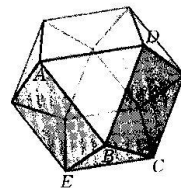
- A. $(0, \frac{\pi}{2})$ B. $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ C. $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ D. $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

10. 已知函数 $f(x) = \sqrt{1-x} - x^3$, 则

- A. $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 1]$ B. $f(x)$ 的值域为 $\mathbb{R}$
C. $\forall x \in (-\infty, 0), f(x) > 1$ D. $f(x)$ 恰有 1 个零点

11. 如图, 该几何体的表面由 8 个正三角形和 6 个正方形构成, 已知该几何体的棱长均为 2, 则

- A. 平面 $ABD \perp$ 平面 BCE
B. 平面 $ABE \perp$ 平面 BCD
C. 该几何体的体积为 $\frac{40\sqrt{2}}{3}$



- D. 存在球 O , 使得该几何体的顶点都在球 O 的球面上

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分。

12. 已知双曲线 $C: x^2 - y^2 = 1$ 的渐近线和圆 $M: (x-1)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相切, 则 $r =$ ▲

13. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $c = 2, B = \frac{\pi}{3}$, $\triangle ABC$ 的周长为 $6 +$

$2\sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ▲

14. 已知函数 $f(x) = x^2 |x - a|$, 若 $\forall x \in [1, 2], f(x) \geq 2$, 则 a 的取值范围是 ▲

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_{2n} = 0, S_{2n-1} = 2$.

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和。

16. (15 分)

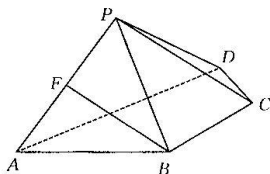
对联,又称对偶、对子、楹联等,是以两组形式相对、内容相关的语句为表现形式的应用性文学样式,具有上下联字数相等、平仄相对、对仗工整等文学特点.从甲、乙、丙、丁 4 副不同的对联(上联和下联共 8 联)中随机取出 4 联(上联或下联).

- (1)求这 4 联可以凑成甲对联的概率;
- (2)记这 4 联可以凑成 X 副对联,求 X 的数学期望.

17. (15 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $AD=AB=2\sqrt{3}$, $CD=CB=2$, $PA=PD$, $\angle ADC=\angle APD=90^\circ$, F 是 AP 的中点.

- (1)证明:平面 $PAB \perp$ 平面 PCD .
- (2)证明: $BF \parallel$ 平面 PCD .
- (3)求直线 BF 与直线 PC 所成角的余弦值.



18. (17 分)

已知抛物线 $C: y^2=2px (p>0)$ 的焦点为 F , 直线 $l: x=8$ 与 C 在第一象限交于点 A , $|AF|=10$.

- (1)求 p 的值.
- (2)设点 B, D, E 均在第一象限, 且点 B 在直线 l 上, 点 D, E 在 C 上.
 - ①是否存在点 B, D , 使得四边形 $FBAD$ 是以 FB, FD 为邻边的平行四边形? 若存在, 求出平行四边形 $FBAD$ 的面积; 若不存在, 请说明理由.
 - ②是否存在点 B, D, E , 使得四边形 $FBED$ 是以 FB, FD 为邻边的矩形? 若存在, 求点 D 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

19. (17 分)

已知函数 $f(x)=a \ln x + \frac{1}{2}x^2 - x$.

- (1)讨论 $f(x)$ 的单调区间;
- (2)若 $f(x) \geq k(x-1) - \frac{1}{2} (a \leq 0)$, 求 a 与 k 的数量关系;
- (3)设 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 是 $f(x)$ 的两个极值点, 证明: $f(x_1) - f(x_2) < \frac{1}{2}$.