理科数学参考解答及评分参考

一、选择题

1.【答案】D

【解析】因为 $z=\frac{1+3i}{1-i}-i=\frac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}-i=\frac{-2+4i}{2}-i=-1+i$,所以 $|z|=\sqrt{2}$.

【命题意图】本小题设置数学课程知识情境,设计复数运算问题,主要考查复数的乘除法,减法运算,复数的模的基础知识;考查运算求解能力,数学运算素养。

2.【答案】B

【解析】根据散点图,去掉 A 点后,可知相关系数 r 的值变大,决定系数 R^2 变大,残差平方和变小,解释变量 x 与预报变量 y 相关性变强,故 A,C,D 错误,B 正确.

【命题意图】本小题主要考查两个变量的相关性、回归方程等基本知识,考查统计与概率思想以及应用能力,考查直观想象、数据分析、数学建模等素养。

3.【答案】B

【解析】$T_{r+1}=C_5^r(x^2)^{5-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r=(-2)^rC_5^rx^{10-3r}$,令 $10-3r=4$ 解得 $r=2$,所以 x^4 的系数为 $(-2)^2C_5^2=40$.

【命题意图】本小题设置数学课程知识情境,设计二项式展开式问题,主要考查二项式展开式的通项公式,求指定项的系数等基础知识;考查运算求解能力,化归与转化思想,考查数学运算素养。

4.【答案】A

【解析】由题意有 $a_2=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$,$a_3=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=-\frac{1}{2}$,$a_4=\frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1}=-3$,$a_5=\frac{-3-1}{-3+1}=2=a_1$,……,即 $a_{n+4}=a_n$,所以数列 $\{a_n\}$ 是周期为 4 的周期数列,$a_{2024}=a_{505\times4+4}=a_4=-3$.

【命题意图】本小题设置数学课程知识情境,设置周期数列问题,主要考查数列的递推公式,周期数列等基础知识;考查数学运算能力,推理论证能力;考查数学运算和逻辑推理素养。

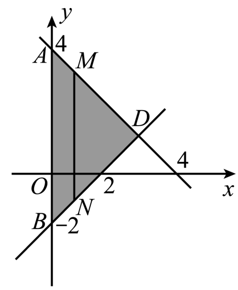
5.【答案】B

【解析】因 D,E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB,AC 的中点,$\overrightarrow{DE}=(3,4)$,所以 $\overrightarrow{BC}=(6,8)$,令 $C(x,y)$,因为 $B(-2,-3)$,所以 $\overrightarrow{BC}=(x+2,y+3)=(6,8)$,解得 $x=4,y=5$,即点 C 的坐标为 $(4,5)$.

【命题意图】本小题设置数学课程知识情境，设计向量问题，主要考查三角形中位线定理，平行向量，向量减法运算，向量的几何意义等基础知识；考查运算求解能力，化归与转换思想；考查数学运算，数学抽象素养。

6.【答案】B

【解析】平面区域 Ω 为如图所示的阴影部分的$\triangle ABD$ 及其内部，因圆心 $C(a,b)\in\Omega$，且圆 C 与 y 轴相切，所以点 C 在图中的线段 MN 上，线段 MN 的方程为 $x=1(-1\leqslant y\leqslant 3)$，由图形得，当点 C 在点 $M(1,3)$处时，$a+b$取得最大值 $1+3=4$.



【命题意图】本小题设置数学课程知识情境，设计线性规划问题，主要考查不等式组表示的可行域，圆与直线相切，距离问题等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，数形结合思想，应用意识；考查逻辑推理，数学建模和数学抽象素养。

7.【答案】C

【解析】甲、乙、丙、丁 4 个小组所有选择方法共有 3^4(种)，其中该 4 个小组恰好分布在这 3 个劳动基地选法种数为 $C_4^2A_3^3$，故所求概率为 $P=\frac{C_4^2A_3^3}{3^4}=\frac{4}{9}$.

【命题意图】本小题主要考查分类加法、分步乘法原理，概率等基本知识，考查统计与概率思想以及应用能力，考查逻辑推理、数学运算、数学建模等素养。

8.【答案】D

【解析】由 $f(x)=\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，其最小值为 $-\sqrt{2}$，选项 A 错误；当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，$f(x)$先增后减，选项 B 错误；$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\cos 0=\sqrt{2}$，选项 C 错误；$g(x)=\sqrt{2}\cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位得到的图象对应的函数为 $y=\sqrt{2}\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\right]=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，选项 D 正确.

【命题意图】本小题设置数学课程学习情境，设计三角函数图象性质问题，主要考查三角函数的最值，单调性，对称性，图象平移等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，化归与转换思想；考查数学运算，逻辑推理和数学抽象素养。

9.【答案】A

【解析】因为 EF 是$\triangle BCD$ 的中位线，所以 $EF\parallel BD$. 因为 $BD\not\subset$平面 PEF，所以 $BD\parallel$平面

PEF. ①正确. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $BD \perp AC$，所以 $BD \perp PG$，所以 $BD \perp$ 平面 PAC，所以平面 $PAC \perp$ 平面 $ABCD$. ②正确. 根据图形对称性易知点 P 在平面 $ABCD$ 内的射影在线段 OC 上，故 $\angle POC$ 为直线 OP 与平面 $ABCD$ 所成角，由 $EF \perp PG$，$EF \perp CG$ 知 $\angle PGC$ 为二面角 $P-EF-C$ 的平面角，而 $\triangle POG$ 为等腰三角形，则 $\angle PGC = 2\angle POC$. ③正确.

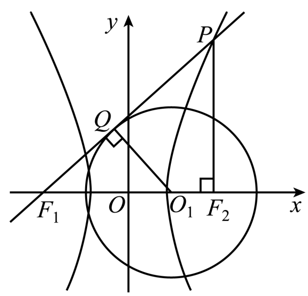
【命题意图】本小题主要考查空间点、线、面的位置关系，直线与平面平行，直线与平面垂直，平面与平面垂直，直线与平面所成角，二面角等基础知识，考查推理论证、空间想象、运算求解能力，考查逻辑推理、直观想象等素养.

10.【答案】D

【解析】当 $a=0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x$，大致图象可以为①；当 $a \neq 0$ 时，$f'(x)=a\left(x+1+\dfrac{1}{a}\right)\mathrm{e}^x$，若 $a>0$，可知 $x<-1-\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；$x>-1-\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，且 $x<-1-\dfrac{1}{a}$，$f(x)<0$，大致图象可以为②；同理，$a<0$，大致图象可以为③或④.

【命题意图】本小题主要考查函数图象和性质、导数等基础知识，考查函数与方程、数形结合思想、化归与转化等数学思想，考查推理论证、运算求解等数学能力，考查数学抽象、逻辑推理、直观想象等素养。

11.【答案】D



【解析】如图，设 $O_1\left(\dfrac{c}{2},0\right)$，直线与圆的切点为 Q，依题意易知 $\triangle F_1O_1Q \backsim \triangle F_1PF_2$，则 $\left|\dfrac{F_1Q}{F_1F_2}\right| = \left|\dfrac{QO_1}{PF_2}\right|$，即 $\dfrac{\sqrt{\left(\frac{3}{2}c\right)^2-c^2}}{2c} = \dfrac{c}{\frac{b^2}{a}}$. 所以 $\sqrt{5}b^2=4ac$，$\sqrt{5}(c^2-a^2)=4ac$，$\sqrt{5}c^2-4ac-\sqrt{5}a^2=0$，即 $\sqrt{5}e^2-4e-\sqrt{5}=0$. 于是，$(\sqrt{5}e+1)(e-\sqrt{5})=0$，即 $e=\sqrt{5}$.

【命题意图】本小题主要考查直线与圆的位置关系，直线与双曲线的位置关系，双曲线的离心率，考查考生数形结合思想，逻辑推理能力、运算求解能力，考查直观想象、数学运算、逻辑推理等素养。

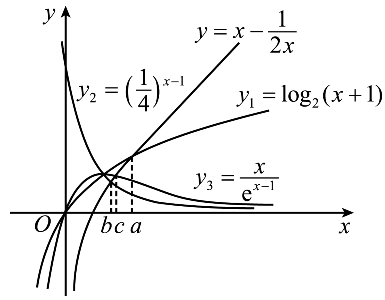
12.【答案】A

【解析】依题意，$a-\dfrac{1}{2a}=\log_2(a+1)$，$b-\dfrac{1}{2b}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{b-1}$，$c-\dfrac{1}{2c}=\dfrac{c}{\mathrm{e}^{c-1}}$. 设函数 $y=x-\dfrac{1}{2x}$，$y_1=\log_2(x+1)$，$y_2=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-1}$，$y_3=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x-1}}$. 由 $y=x-\dfrac{1}{2x}$ 得 $y'=1+\dfrac{1}{2x^2}>0$，可知 $x>0$ 时，函数 $y=$

$x-\dfrac{1}{2x}$单调递增；由 $y_3=\dfrac{x}{e^{x-1}}=\dfrac{ex}{e^x}$得$y_3'=\dfrac{e(1-x)}{e^x}$，可知

$x<1$时，$y_3=\dfrac{x}{e^{x-1}}$单调递增；$x>1$ 时，$y_3=\dfrac{x}{e^{x-1}}$单调递减.

在同一坐标系中，分别作出函数 $y=x-\dfrac{1}{2x}$，$y_1=\log_2(x+1)$，$y_2=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-1}$，$y_3=\dfrac{x}{e^{x-1}}$的图象，结合图象可知，$b<c<a$，故选 A.



【命题意图】本小题以指数函数、对数函数、幂函数等构成新函数为载体，考查函数的图象和性质、导数的应用等基础知识，考查化归与转化、数形结合、函数与方程等数学思想，综合考查推理论证、运算求解等数学能力和创新能力，考查数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算等素养。

二、填空题

13.【答案】$\{1,7,9\}$

【解析】由题意有 $A\cup B=\{2,3,4,5,6,8\}$，所以 $\complement_U(A\cup B)=\{1,7,9\}$.

【命题意图】本小题设置数学课程知识情境，设计集合运算问题，主要考查集合的并集与补集运算等基础知识；考查运算求解能力，考查数学抽象等素养。

14.【答案】$y=(e-1)x$

【解析】依题意，$f(x)=e^x-x$，$f'(x)=e^x-1$，$f'(1)=e-1$，$f(1)=e-1$，则曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处切线方程为 $y=(e-1)(x-1)+e-1$，即 $y=(e-1)x$.

【命题意图】本小题主要考查导数的应用等基础知识，考查化归与转化等数学思想，考查推理论证、化归与转化、运算求解等数学能力，考查逻辑推理、数学运算等素养。

15.【答案】$-\dfrac{1}{2}$

【解析】依题意，等差数列$\{a_n\}$中，$a_n=a_1+(n-1)\cdot\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}n+\left(a_1-\dfrac{2\pi}{3}\right)$，显然函数 $y=\cos\left[\dfrac{2\pi}{3}n+\left(a_1-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$的周期为 3，而 $n\in\mathbf{N}^*$，即 $\cos a_n$ 最多有 3 个不同取值，又因为 $S=\{x\mid x=\cos a_n,n\in\mathbf{N}^*\}$有且仅有两个元素，则在 $\cos a_1$，$\cos a_2$，$\cos a_3$ 中，有 $\cos a_1=\cos a_2\neq\cos a_3$或 $\cos a_1\neq\cos a_2=\cos a_3$ 或 $\cos a_1=\cos a_3\neq\cos a_2$，于是有 $\cos\theta=\cos\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)$或 $\cos\theta=\cos\left(\theta+\dfrac{4\pi}{3}\right)$，即 $\theta+\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)=2k\pi$ 或 $\theta+\left(\theta+\dfrac{4\pi}{3}\right)=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以$\theta=k\pi-\dfrac{\pi}{3}$或 $\theta=k\pi-\dfrac{2\pi}{3}$，

$k\in\mathbf{Z}$,所以当 $k\in\mathbf{Z}$ 时,两个元素的积$=\cos\left(k\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left[\left(k\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{4\pi}{3}\right]=-\cos\left(k\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$\cos k\pi=-\cos^2 k\pi\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$或两个元素的积$=\cos\left(k\pi-\frac{2\pi}{3}\right)\cos k\pi=-\frac{1}{2}\cos^2 k\pi=-\frac{1}{2}$.

【命题意图】本小题设置数学课程学习情境,设置等差数列与集合元素、三角函数问题,主要考查等差数列的通项公式,三角函数的周期性,集合元素的互异性,同角三角函数关系,特殊角的三角函数值等基础知识;考查运算求解能力,推理论证能力,化归与转化思想,应用意识;考查数学运算,逻辑推理素养。

16.【答案】$\frac{32\sqrt{3}}{9}\pi$

【解析】设球心为 O,圆锥底面圆心为 O_1,圆锥顶点为 P,圆锥底面圆半径为 r. 由球体的对称性,易知 O_1 在线段 PO 上时体积不可能最大,即 O_1 在线段 PO 的延长线上,则圆锥的高为 $2+\sqrt{4-r^2}$,圆锥的体积 $V(r)=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot(2+\sqrt{4-r^2})$,$0<r\leqslant 2$. 记 $\sqrt{4-r^2}=t$,则 $0\leqslant t<2$.

所以 $V=\frac{1}{3}\pi(4-t^2)(2+t)=\frac{1}{3}\pi(-t^3-2t^2+4t+8)$,$0\leqslant t<2$. 因为 $V'=\frac{1}{3}\pi(-3t^2-4t+4)$ $=\frac{1}{3}\pi(-3t+2)(t+2)$,所以 V 在$\left(0,\frac{2}{3}\right)$上递增,在$\left(\frac{2}{3},2\right)$上递减. 所以当 $t=\frac{2}{3}$ 即 $r=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 时圆锥的体积最大. 此时圆锥的母线长为$\sqrt{r^2+(2+\sqrt{4-r^2})^2}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$,圆锥的侧面积为$\frac{1}{2}\times 2\pi\times\frac{4\sqrt{2}}{3}\times\frac{4\sqrt{6}}{3}=\frac{32\sqrt{3}}{9}\pi$.

【命题意图】本小题主要考查圆锥的结构特征,圆锥体积、侧面积,球体结构特征,函数最值,导数的应用等基础知识,考查数形结合、函数与方程思想,考查推理论证、空间想象、运算求解能力,考查直观想象、逻辑推理、数学运算等素养。

三、解答题

17.【解析】(1)$K^2=\frac{550\times(100\times100-50\times300)^2}{150\times400\times400\times150}\approx 3.819>2.706$, …………………… 3 分

因此,有 90%的把握认为该校学生选择课外活动类别与性别有关系. …………………… 4 分

(2)依题意,ξ 的可能值为 0,1,2,3,4,则

则 $P(\xi=0)=C_2^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times C_2^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4}{36}$; …………………… 5 分

$P(\xi=1)=C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times C_2^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times C_2^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{12}{36}$; …………………… 6 分

$P(\xi=2)=C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times C_2^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times C_2^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times C_2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=$

$\frac{13}{36}$; …………………………………………………………………… 7 分

$P(\xi=3)=C_2^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times C_2^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times C_2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{36}$; ………………… 8 分

$P(\xi=4)=C_2^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times C_2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{36}$. ……………………………………… 9 分

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{4}{36}$或填$\frac{1}{9}$	$\frac{12}{36}$或填$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{6}{36}$或填$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

…………………………………………………………………… 10 分

所以，$E(\xi)=0\times\frac{4}{36}+1\times\frac{12}{36}+2\times\frac{13}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{1}{36}=\frac{5}{3}$. ……………………… 12 分

【命题意图】本小题考查统计案例、卡方分布、离散型随机变量分布列等基础知识；考查统计与概率思想；考查运算求解、数据处理及应用意识，考查数学建模、数据处理、数学运算等素养。

18.【解析】(1)证明：因为在$\triangle PAC$中，$\angle APC=90^\circ$，$PA=\sqrt{3}$，$PC=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以 $AC=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………………………… 1 分

又因为$\angle PMA=90^\circ$，所以 $AP\cdot PC=AC\cdot PM$.

则 $PM=1$，$AM=\sqrt{2}$. …………………………………………………………… 2 分

在$\triangle ABM$中，由余弦定理可得 $BM=\sqrt{AB^2+AM^2-2AB\cdot AM\cdot\cos\angle CAB}=2$，

所以 $AM^2+BM^2=AB^2$.

于是 $BM\perp AM$，$BM\perp AC$. ………………………………………………… 3 分

又 $PM\perp AC$，所以 $AC\perp$平面 PBM. …………………………………………… 4 分

又因为 $AC\subset$平面 ABC，

所以平面 $PBM\perp$平面 ABC. ………………………………………………… 5 分

(2)因为二面角 $P-AC-B$ 为锐二面角，

平面 $PBM\perp$平面 ABC，平面 $PBM\cap$平面 $ABC=BM$，

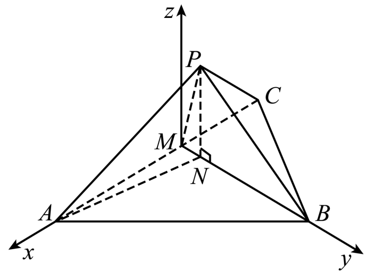
过点 P 作 $PN\perp$平面 ABC 于 N 点，则 N 点必在线段 BM 上. ………………… 6 分

连接 AN，可知$\angle PAN$为 PA 与平面 ABC 所成的角. ……………………………… 7 分

在 Rt△PAN 中，$\sin\angle PAN=\frac{\sqrt{3}}{5}$，$PA=\sqrt{3}$，得 $PN=\frac{3}{5}$.

在 Rt△PMN 中，$PM=1$，$PN=\frac{3}{5}$，得 $MN=\frac{4}{5}$. ………………………………………… 8 分

以 M 为坐标原点，建立如图所示空间直角坐标系 $M-xyz$，



则 $A(\sqrt{2},0,0)$，$B(0,2,0)$，$P\left(0,\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$，$M(0,0,0)$.

………………………………………………………… 9 分

设平面 BAP 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\sqrt{2}x-2y=0,\\ \frac{6}{5}y-\frac{3}{5}z=0.\end{cases}$

令 $x=\sqrt{2}$，则得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},1,2)$. …………………………………………………… 10 分

同理，平面 MAP 即平面 CAP 的一个法向量为

$\boldsymbol{n}=(0,3,-4)$. ………………………………………………………………………… 11 分

设二面角 $B-AP-C$ 的平面角为 θ，

所以 $|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{7}}{7}$，即 $\sin\theta=\frac{\sqrt{42}}{7}$.

故二面角 $B-AP-C$ 的正弦值为$\frac{\sqrt{42}}{7}$. ………………………………………………… 12 分

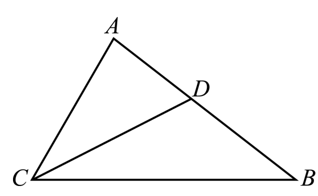
【命题意图】本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面垂直的判定，直线与平面所成角，二面角，空间向量等基础知识，考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力，考查直观想象、逻辑推理、数学运算等素养。

19.【解析】(1)由 $\tan B+\tan C=\frac{\sqrt{3}a}{c\cos B}$，根据正弦定理可得

$\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\sqrt{3}\sin A}{\sin C\cos B}$，………………………………………………………… 2 分

因为$\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\cos B\cos C}=\frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C}=\frac{\sin A}{\cos B\cos C}$，

所以$\frac{\sin A}{\cos B\cos C}=\frac{\sqrt{3}\sin A}{\sin C\cos B}$，………………………………………………………… 4 分



因为 $0<A<\pi$，$\cos B$ 位于分母，所以 $\sin A\neq0$，$\cos B\neq0$，

所以 $\tan C=\sqrt{3}$，

由 $0<C<\pi$，

所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………… 6 分

(2)由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab=18\sqrt{3}$，

所以 $ab=72$，…………………………………………………………………………… 7 分

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}b\cdot CD\cdot\sin\angle ACD+\frac{1}{2}a\cdot CD\cdot\sin\angle BCD$，

因为 CD 为角平分线，所以 $\angle ACD=\angle BCD=\frac{\pi}{6}$，又 $CD=4\sqrt{3}$，

所以有 $\frac{1}{2}b\times4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\times4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=18\sqrt{3}$，

所以 $a+b=18$，…………………………………………………………………………… 10 分

由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab$

$=(a+b)^2-3ab=18^2-3\times72=108$，

所以 $c=6\sqrt{3}$. …………………………………………………………………………… 12 分

【命题意图】本小题设置数学课程知识情境，设计解三角形问题，主要考查三角恒等变换，正弦定理，余弦定理，三角形角平分线性质，三角形面积等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，应用意识；考查数学运算，逻辑推理与数学抽象素养。

20.【解析】(1)由题意得 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$.

由 $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{OF}=0$，得 $M\left(\frac{p}{2},p\right)$. …………………………………………………… 1 分

从而 $\triangle OFM$ 的面积 $S_{\triangle OFM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot p=1$，则 $p=2$. ………………………………… 3 分

所以，抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. ………………………………………………… 4 分

(2)设 $M\left(\frac{t^2}{4},t\right)(t>0)$，则 $\overrightarrow{MF}=(1-\frac{t^2}{4},-t)$，$\overrightarrow{OF}=(1,0)$.

由 $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{OF}=-3$，得 $1-\frac{t^2}{4}=-3$，即 $t=4$.

所以，此时 $M(4,4)$. ………………………………………………………………… 6 分

由题意可知，l 斜率必不等于 0，于是可设 $l:x=my+n$.

由 $\begin{cases}x=my+n,\\y^2=4x\end{cases}$ 可得 $y^2-4my-4n=0$. ……………………………………… 7 分

上述方程的判别式满足 $\Delta=(-4m)^2-4\cdot(-4n)>0$，即 $m^2>-n$.

设 $A\left(\frac{{y_1}^2}{4},y_1\right)$，$B\left(\frac{{y_2}^2}{4},y_2\right)$.

根据韦达定理有：$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4n$. …………………………………… 8 分

因为 $k_{MA}\cdot k_{MB}=-2$,

所以 $\dfrac{y_1-4}{\dfrac{y_1^2}{4}-4}\cdot\dfrac{y_2-4}{\dfrac{y_2^2}{4}-4}=-2$, $\dfrac{4}{y_1+4}\cdot\dfrac{4}{y_2+4}=-2$,

于是 $y_1y_2+4(y_1+y_2)+24=0$.

所以, $-4n+16m+24=0$, 即 $n=4m+6$. ………………………………………………………… 10 分

故直线 l 的方程为 $x=my+4m+6$, 即 $x-6=m(y+4)$,

所以直线 l 恒过定点 $N(6,-4)$. ………………………………………………………………… 11 分

过点 M 作 $m\perp l$, 且 $l\cap m=M_1$, 则 $|MM_1|\leqslant|MN|=2\sqrt{17}$.

其中, 当 $MN\perp l$ 时等号成立.

所以, 点 M 到直线 l 的距离的最大值为 $2\sqrt{17}$. ……………………………………… 12 分

【命题意图】本小题主要考查抛物线的标准方程、简单几何性质,直线与抛物线位置关系,平面向量的数量积等基础知识,考查数形结合,函数与方程,化归与转化思想,考查逻辑推理、运算求解能力,考查逻辑推理、数学运算、直观想象等素养。

21.【解析】(1)由 $f(x)=e^x-ax-2$, 得 $f'(x)=e^x-a$,

当 $a\leqslant0$ 时, $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 单调递增, $f(x)$ 不存在极值. ……………………………… 1 分

当 $a>0$ 时, 令 $f'(x)=0$, 则 $x=\ln a$,

若 $x<\ln a$, 则 $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减; 若 $x>\ln a$, 则 $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增.

所以 $x=\ln a$ 是 $f(x)$ 的极小值点. ………………………………………………………………… 3 分

因为 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 存在极值, 则 $0<\ln a<1$, 即 $1<a<e$.

所以, $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 存在极值时, a 的取值范围是 $(1,e)$. ………………………………… 4 分

(2)由 $f(x)>x-\sin x-\cos x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立,

即 $e^x+\cos x+\sin x-(a+1)x-2>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立. ………………………… 5 分

设 $g(x)=e^x+\cos x+\sin x-(a+1)x-2$, 则 $g(x)>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立,

则 $g'(x)=e^x-\sin x+\cos x-(a+1)$,

令 $m(x)=g'(x)=e^x-\sin x+\cos x-(a+1)$, 则 $m'(x)=e^x-\cos x-\sin x$.

令 $n(x)=m'(x)=e^x-\cos x-\sin x$, 则 $n'(x)=e^x+\sin x-\cos x$,

则 $x\in(0,1)$ 时, $e^x+\sin x>1$, 则 $n'(x)=e^x+\sin x-\cos x>0$; $x\in[1,+\infty)$ 时, $e^x\geqslant e$,

则 $n'(x)>0$,

所以 $x\in(0,+\infty)$ 时, $n'(x)>0$, 则 $n(x)$ 即 $m'(x)$ 单调递增,

所以 $m'(x)>m'(0)=0$, 则 $m(x)$ 即 $g'(x)$ 单调递增,

所以 $g'(x)>g'(0)=1-a$. ……………………………………………………………………………… 7 分

①当 $a\leqslant 1$ 时，$g'(0)=1-a\geqslant 0$，故 $x\in(0,+\infty)$，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 单调递增.

所以 $g(x)>g(0)=0$，

所以 $f(x)>x-\sin x-\cos x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立. ………………………………… 9 分

②当 $a>1$ 时，$g'(0)=1-a<0$，

$g'[\ln(a+3)]=a+3-\sin[\ln(a+3)]+\cos[\ln(a+3)]-(a+1)$

$=2-\sqrt{2}\sin\left[\ln(a+3)-\dfrac{\pi}{4}\right]>0$，

故在区间 $(0,\ln(a+3))$ 上函数 $g'(x)$ 存在零点 x_0，即 $g'(x_0)=0$，……………………… 10 分

由于函数 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<g'(x_0)=0$，

故函数 $g(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递减，

所以，当 $x\in(0,x_0)$ 时，函数 $g(x)<g(0)=0$，不合题意.

综上所述，a 的取值范围为 $(-\infty,1]$. …………………………………………………… 12 分

【命题意图】本小题主要考查导数几何意义、极值，函数与导数的综合应用等基础知识，考查化归与转化、分类与整合、函数与方程等数学思想，考查推理论证、运算求解等数学能力，考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等素养。

选考题

22.【解析】(1) 由 $\begin{cases}x=1+2\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$ 知 $(x-1)^2=4\cos^2\alpha$，$y^2=4\sin^2\alpha$，

则曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=4$. …………………………………………… 2 分

因为直线 l 的方程为 $\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，即 $\rho\sin\theta-\rho\cos\theta=3$.

由 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 可得 $x-y+3=0$.

所以直线 l 的直角坐标方程为 $x-y+3=0$. …………………………………………… 4 分

(2) 由(1)可知，点 A 的坐标为 $(-3,0)$.

因为 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，所以 M 是线段 AB 的中点. ………………………………… 5 分

由题意，可设 $M(x,y)$，$B(1+2\cos\alpha,2\sin\alpha)$，

则 $\begin{cases}2x=(1+2\cos\alpha)+(-3),\\ 2y=2\sin\alpha+0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}x=\cos\alpha-1,\\ y=\sin\alpha.\end{cases}$ ……………………………………………………………… 7 分

代入曲线 C 的方程，可得

$(\cos\alpha-1-1)^2+\sin^2\alpha=4$，即 $\cos^2\alpha-4\cos\alpha+4+\sin^2\alpha=4$.

解之可得，$\cos\alpha-1=-\frac{3}{4}$. ………………………………………………………… 9 分

此时，$\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$.

由此可知，两曲线有两个公共点，其直角坐标为 $\left(-\frac{3}{4},\pm\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$. ……………………… 10 分

【命题意图】本小题考查参数方程与普通方程互化、极坐标方程与直角坐标方程互化、代入法求动点轨迹方程等基础知识，考查数形结合思想，考查推理论证、运算求解等能力，考查数学抽象、数学运算等素养。

23.【解析】(1)不存在 a,b,c，使得 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b+c}\in(0,5)$. 理由如下：

因为 a,b,c 都是正数，且 $a+b+c=3$，所以 $b+c=3-a>0$，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b+c}=\frac{1}{a}+\frac{9}{3-a}=\frac{1}{3}[a+(3-a)]\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{3-a}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(10+\frac{3-a}{a}+\frac{9a}{3-a}\right)\geqslant\frac{1}{3}\left(10+2\sqrt{\frac{3-a}{a}\cdot\frac{9a}{3-a}}\right)=\frac{16}{3}$，

当且仅当 $\frac{3-a}{a}=\frac{9a}{3-a}$，即 $a=\frac{3}{4}$，$b+c=\frac{9}{4}$ 时取等号，

即 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b+c}$ 的最小值为 $\frac{16}{3}$，

所以，不存在 a,b,c，使得 $\frac{1}{a}+\frac{9}{b+c}\in(0,5)$. ………………………………………………… 5 分

(2)【证明】$(\sqrt{3+a}+\sqrt{3+b}+\sqrt{3+c})^2$

$=9+(a+b+c)+2\sqrt{3+a}\cdot\sqrt{3+b}+2\sqrt{3+b}\cdot\sqrt{3+c}+2\sqrt{3+a}\cdot\sqrt{3+c}$

$\leqslant 12+(3+a)+(3+b)+(3+b)+(3+c)+(3+a)+(3+c)$

$=30+2(a+b+c)$

$=36$.

当且仅当 $a=b=c=1$ 时等号成立，

所以 $\sqrt{3+a}+\sqrt{3+b}+\sqrt{3+c}\leqslant 6$. ……………………………………………………… 10 分

【命题意图】本小题主要考查均值不等式应用、不等式的证明方法等基础知识，考查分类与整合思想，考查运算求解、推理论证等数学能力，考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等素养。