数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.【命题意图】本小题主要考查不等式解集，集合的交集运算等基础知识，考查化归与转化等数学思想，考查数学抽象等数学核心素养。

【答案】B

【解析】依题意，得 $N=\left\{x\,\middle|\,x>\frac{1}{4},x\in\mathbf{R}\right\}$，则 $M\cap N=\{1,2,3\}$.

2.【命题意图】本小题主要考查同角三角函数的基本关系，考查化归与转化等数学思想，考查数学运算等数学核心素养。

【答案】A

【解析】因为 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，且 α 为第二象限角，所以 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，则 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$.

3.【命题意图】本小题主要考查全称量词和特称量词，命题的否定等基础知识，考查逻辑推理等数学核心素养。

【答案】C

【解析】命题“$\exists x\in\mathbf{R},x^3>x^2+x-2$”的否定是 $\forall x\in\mathbf{R},x^3\leqslant x^2+x-2$.

4.【命题意图】本小题主要考查充分条件与必要条件、象限角、三角函数性质等基础知识，考查数学抽象等和数学核心素养。

【答案】A

【解析】由角 θ 为第三象限角，则 $\tan\theta>0$；反之，若 $\tan\theta>0$，则 θ 为第一或第三象限角，故“角 θ 为第三象限角”是“$\tan\theta>0$”成立的充分不必要条件.

5.【命题意图】本小题主要考查函数图象和性质的等基础知识，考查数学抽象、直观想象等数学核心素养。

【答案】A

【解析】依题意，$f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 是奇函数，其图象关于原点对称，故选项 C，D 错误；由于 $x>0$ 时，$f(x)>0$，故选项 B 错误，故选 A.

6.【命题意图】本小题主要考查指数函数、对数函数、幂函数的图象和性质，考查数学抽象、数学建模、数学运算等数学核心素养。

【答案】C

【解析】对于选项 A，函数 $y=\left(\frac{4}{5}\right)^x$ 是减函数，由于 $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$，则 $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$，故选项 A 错误；对于选项 B，因为 $1.7^{0.3}>1.7^0=1,0.9^{3.1}<0.9^0=1$，所以 $1.7^{0.3}>0.9^{3.1}$，选项 B 错误；对于选

项 C，$\log_3 7=\frac{\lg 7}{\lg 3}>\frac{\lg 7}{\lg 5}=\log_5 7$，故选项 C 正确；对于选项 D，$\log_2 3=\log_4 9>\log_4 7$，故选项 D 错误.

7.【命题意图】本小题主要考查同角三角函数的基本关系等数学基础知识，考查化归与转化等数学思想，考查推理论证等数学能力。

【答案】D

【解析】$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}}-\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}}=\frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}-\frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$，因为 α 是第三象限角，所以原式$=\frac{1+\sin\alpha}{-\cos\alpha}-\frac{1-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-2\tan\alpha$.

8.【命题意图】本小题主要考查函数奇偶性、对称性等函数性质，考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等数学核心素养。

【答案】D

【解析】函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，则 $f(x)=f(-x)$，由 $f(1+x)+f(1-x)=0$ 可知 $f(2+x)+f(-x)=0$，所以 $f(2+x)=-f(-x)=-f(x)$，进而有 $f(4+x)=-f(2+x)=f(x)$. 从而 $f\left(\frac{57}{2}\right)=f\left(\frac{57}{2}-4\right)=f\left(\frac{57}{2}-4-4\right)=f\left(\frac{57}{2}-4-4-4\right)=\cdots=f\left(\frac{57}{2}-7\times 4\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\log_2 2=1$.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9.【命题意图】本小题主要考查不等式性质及函数的单调性等基础知识，考查数学抽象、逻辑推理等数学核心素养。

【答案】AC

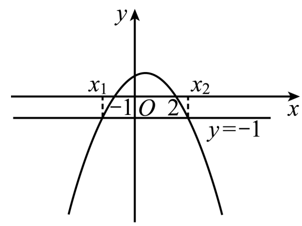
【解析】对于 A，$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$，由于 $0<a<b$，则 $b-a>0$，$ab>0$，则 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$，所以 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，选项 A 中不等式一定成立；对于 B，$a^2-b^2=(a+b)(a-b)<0$，则 $a^2<b^2$，选项 B 中不等式不成立；对于 C，$\frac{a}{b}-\frac{a+2}{b+2}=\frac{2(a-b)}{b(b+2)}$，由于 $0<a<b$，则 $a-b<0$，得 $\frac{a}{b}<\frac{a+2}{b+2}$，故选项 C 中的不等式一定成立；对于选项 D，由于 $0<a<b$，则 $a+1<b+1$，因为幂函数 $y=\sqrt{x}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $\sqrt{a+1}<\sqrt{b+1}$，故选项 D 中的不等式不成立.

10.【命题意图】本小题主要考查一元二次不等式的解法等基础知识，考查化归与转化等数学思想，考查运算求解等数学能力。

【答案】ABD

【解析】由题知 $a(x-2)(x+1)+1=ax^2-ax-2a+1>0$ 的解集为 (x_1,x_2)，所以 $a<0$，且 $\begin{cases}x_1+x_2=1,\\ x_1x_2=\frac{1}{a}-2,\end{cases}$ 所以 $x_1+x_2=1$，$x_1x_2+2=\frac{1}{a}<0$，故选项 A，B 正确；原不等式可化为 $f(x)=$

$a(x-2)(x+1)>-1$ 的解集为 (x_1,x_2)，而 $f(x)$ 的零点分别为 $-1,2$ 且 $f(x)$ 的图象开口向下，又 $x_1<x_2$，$f(x)$ 的大致图象如图所示：

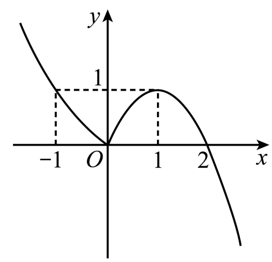


由图知，$x_1<-1<2<x_2$，$|x_1-x_2|>3$，故选项 C 错误，选项 D 正确.

11.【命题意图】本小题主要考查分段函数、函数图形和性质、函数零点等基础知识，考查数形结合、化归与转化等数学思想，考查数学抽象、直观想象等数学核心素养。

【答案】ACD

【解析】由于 $f[f(-3)]=f(7)=-35$，故选项 A 正确；如图可知 $f(x)=\lambda$ 有 3 个不相等实数根时，满足 $0<\lambda<1$，选项 B 错误；对于选项 C，易得 $a\in(-1,0)$，由二次函数对称性知 $b+c=2$，故 $a+b+c\in(1,2)$，故选项 C 正确；对于选项 D，转化为方程 $f[f(x)]=\lambda$ 根的个数问题，令 $t=f(x)$，则 $f(t)=\lambda$，根据选项 B 的解析可知，$\lambda\in(0,1)$，方程 $f(t)=\lambda$ 有 3 个互不相等实数根 t_1,t_2,t_3，且 $t_1\in(-1,0)$，$t_2\in(0,1)$，$t_3\in(1,2)$，结合图象可知：方程 $f(x)=t_1\in(-1,0)$ 有 1 个大于 2 的实数根；方程 $f(x)=t_2\in(0,1)$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,1)$，$(1,2)$ 上各有 1 个的实数根；方程 $f(x)=t_3\in(1,2)$ 有 1 个小于 -1 的实数根，故方程 $f[f(x)]=\lambda$ 共有 5 个相异实数根，选项 D 正确.



三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12.【命题意图】本小题主要考查基本不等式的应用，考查化归与转化等数学思想，考查逻辑推理、数学运算等数学核心素养.

【答案】4

【解析】依题意，$f(x)=x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$，当且仅当 $x=\frac{4}{x}$，即 $x=2$ 时“=”成立，故函数 $f(x)$ 最小值为 4.

13.【命题意图】本小题主要考查同角三角函数基本关系，考查化归与转化等数学思想，考查数学运算等数学核心素养。

【答案】$\frac{3}{10}$

【解析】因为 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{9}}=\frac{3}{10}$.

14.【命题意图】本小题主要考查指数、对数的运算，指数函数的性质等基础知识，考查化归与转化、数形结合等数学思想，考查数学抽象、数学运算、数学建模等数学核心素养。

【答案】36

【解析】根据题中所给模型，代入有关数据，注意以 2024 年的为初始值，则 2030 年底该地区新能源汽车的保有量为 $y=\dfrac{1020}{1+\left(\dfrac{1020}{20}-1\right)e^{-0.10\times 6}}=\dfrac{1020}{1+50e^{-0.6}}$，因为 $\ln 0.55\approx -0.6$，所以 $e^{-0.6}\approx 0.55$，则 $y=\dfrac{1020}{1+50e^{-0.5}}\approx\dfrac{1020}{1+50\times 0.55}\approx 36$，所以 2030 年底该市新能源汽车的保有量约为 36 万辆.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

【考查意图】本小题主要考查不等式的解法，集合间的关系，交集、并集与补集等必备知识；考查运算求解能力，逻辑思维能力，应用意识。

【解析】对于集合 $A=\{x\mid x^2-x-6\geqslant 0\}$，

不等式 $x^2-x-6\geqslant 0$ 即为 $(x-3)(x+2)\geqslant 0$，…………………… 2 分

解得 $x\leqslant -2$，或 $x\geqslant 3$，

所以，集合 $A=\{x\mid x\leqslant -2$，或 $x\geqslant 3\}$. …………………… 5 分

(1) $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid -2<x<3\}$，…………………… 7 分

当 $a=0$ 时，$B=\{x\mid -5<x<1\}$. …………………… 8 分

所以 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{x\mid -2<x<1\}$. …………………… 9 分

(2)由 $A\cup B=\mathbf{R}$，得 $\begin{cases}a-5\leqslant -2,\\2a+1\geqslant 3,\end{cases}$ …………………… 12 分

解得 a 的取值集合为 $\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 3\}$. …………………… 13 分

16.（15 分）

【命题意图】本小题主要考查任意三角函数定义、诱导公式等数学基础知识，考查化归与转化等数学思想，考查推理论证等数学能力。

【解析】(1)由已知可得，

$\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$. …………………… 6 分

所以 $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\tan\alpha}=\dfrac{-\dfrac{\sqrt{5}}{5}-\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. …………………… 8 分

(2)原式 $=\dfrac{(-\sin\alpha)(-\sin\alpha)\sin(4\pi+\pi-\alpha)\cos\left(5\pi+\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{(-\cos\alpha)\sin(2\pi+\pi-\alpha)[-\sin(\pi-\alpha)]\sin\left(4\pi+\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$ …………………… 10 分

$=\dfrac{\sin^2\alpha\sin(\pi-\alpha)\left[-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{-\cos\alpha\sin(\pi-\alpha)(-\sin\alpha)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$ …………………… 12 分

$=\dfrac{\sin^2\alpha\sin\alpha(-\sin\alpha)}{\cos\alpha\sin\alpha\sin\alpha\cos\alpha}$

$=-\tan^2\alpha$ ………………………………………………………………………… 14 分

$=-\dfrac{1}{4}$. ………………………………………………………………………… 15 分

17.(15 分)

【考查意图】本小题设置分数指数幂和对数式相关运算的数学学习情境，主要考查分数指数幂和对数式的运算法则等基础知识；考查化归与转化等数学思想；考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养。

【解析】(1) $2\sqrt{3}\times3\sqrt[3]{1.5}\times\sqrt[6]{12}$

$=2\times3^{\frac{1}{2}}\times3\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\times(2^2\times3)^{\frac{1}{6}}$ ………………………………………… 2 分

$=2\times3^{\frac{1}{2}}\times3\times3^{\frac{1}{3}}\times2^{-\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{6}}$ ………………………………………… 4 分

$=2^{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$ ………………………………………………… 6 分

$=2\times3^2=18$. ……………………………………………………………… 7 分

(2) $\log_5 25-\log_2(\log_2 16)+\log_2 5\times\log_5 9\times(\log_3 8-\log_3 4)$

$=2\log_5 5-\log_2 4+\log_2 5\times2\log_5 3\times\log_3 2$ ………………………………… 9 分

$=2-\log_2 4+2\log_2 5\times\log_5 3\times\log_3 2$ ………………………………… 11 分

$=2-2+2\times\dfrac{\lg 5}{\lg 2}\times\dfrac{\lg 3}{\lg 5}\times\dfrac{\lg 2}{\lg 3}$ ………………………………… 13 分

$=2-2+2=2$. ………………………………………………………………… 15 分

18.(17 分)

【命题意图】本小题主要考查函数奇偶性、不等式解法等基础知识，考查化归与转化等数学思想，考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等数学核心素养。

【解析】(1)方法 1：由于 $f(x)=\dfrac{a-2^x}{2+2^{x+1}}$ 是奇函数，

则 $f(0)=0$，即 $\dfrac{a-1}{4}=0$，解得 $a=1$. ………………………………………… 4 分

当 $a=1$ 时，$f(x)=\dfrac{1-2^x}{2+2^{x+1}}$，$f(-x)=\dfrac{1-2^{-x}}{2+2^{-x+1}}=\dfrac{2^x-1}{2^{x+1}+2}=-f(x)$，故 $f(x)$ 是奇函数，

所以 $a=1$. ………………………………………………………………… 5 分

方法 2：因为 $f(x)=\dfrac{a-2^x}{2+2^{x+1}}$ 是奇函数，

所以 $f(-x)=-f(x)$，即 $\dfrac{a-2^{-x}}{2+2^{-x+1}}=-\dfrac{a-2^x}{2+2^{x+1}}$ 恒成立，………………………… 2 分

则 $\dfrac{a\cdot2^x-1}{2^{x+1}+2}=-\dfrac{a-2^x}{2+2^{x+1}}$ 恒成立，

所以 $a\cdot2^x-1=2^x-a$ 恒成立，即 $(a-1)(2^x+1)=0$ 恒成立，

解得 $a=1$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可得，$f(x)=\frac{1-2^x}{2+2\times 2^x}$，由 $f(x)>-\frac{1}{4}$，得 $f(x)=\frac{1-2^x}{2+2\times 2^x}>-\frac{1}{4}$，

得 $1-2^x>-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times 2^x$，即 $2^x<3$，所以 $x<\log_2 3$，

故不等式 $f(x)>-\frac{1}{4}$的解集为$(-\infty,\log_2 3)$. ………………………………………… 10 分

(3)由(2)知，$f(x)=\frac{1-2^x}{2+2\times 2^x}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2^x+1}-1\right)$，

可知 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. ……………………………………………………………… 12 分

不等式 $f(2m^2-3)+f(1-3m)>0$，即为 $f(2m^2-3)>-f(1-3m)$，

因为 $f(x)$是奇函数，

所以 $f(2m^2-3)>-f(1-3m)=f(3m-1)$，

所以 $2m^2-3<3m-1$，即 $2m^2-3m-2<0$，………………………………………………… 14 分

即$(m-2)(2m+1)<0$，所以$-\frac{1}{2}<m<2$.

所以，m 的取值范围是$\left(-\frac{1}{2},2\right)$. ………………………………………………………… 17 分

19.(17 分)

【命题意图】本小题主要考查函数图象和性质等基础知识，考查化归与转化、数形结合等数学思想，考查数学抽象、逻辑推理、数学运算、直观想象等数学核心素养。

(1)证明：

方法 1：函数 $f(x)=ax+1-\ln\frac{2+x}{2-x}$的定义域为$(-2,2)$. ………………………………… 1 分

设 $g(x)=ax-\ln\frac{2+x}{2-x}$，$x\in(-2,2)$.

$\forall x\in(-2,2)$，$g(-x)=-ax-\ln\frac{2-x}{2+x}=-ax+\ln\frac{2+x}{2-x}=-g(x)$，…………………… 3 分

所以 $g(x)$为奇函数，函数 $g(x)$的图象关于原点对称. ……………………………………… 4 分

所以，函数 $f(x)$的图象关于点$(0,1)$对称.

所以，函数 $f(x)$的图象是中心对称图形. ……………………………………………………… 5 分

方法 2：函数 $f(x)=ax+1-\ln\frac{2+x}{2-x}$的定义域为$(-2,2)$. ………………………………… 1 分

因为 $f(-x)+f(x)=-ax+1-\ln\frac{2-x}{2+x}+ax+1-\ln\frac{2+x}{2-x}=2-\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\cdot\frac{2+x}{2-x}\right)=2$，…

……………………………………………………………………………………………………… 4 分

所以，函数 $f(x)$的图象关于点$(0,1)$对称.

所以，函数 $f(x)$的图象是中心对称图形. ……………………………………………………… 5 分

(2)【证明】

由已知，$f(x)=ax+1-\ln\frac{2+x}{2-x}(-2<x<0)$，

设 $\forall x_1, x_2 \in (-2,0)$，且 $x_1 < x_2$，

$f(x_1)-f(x_2)=ax_1+1-\ln\dfrac{2+x_1}{2-x_1}-\left(ax_2+1-\ln\dfrac{2+x_2}{2-x_2}\right)$ ………………………………… 6 分

$=a(x_1-x_2)-\ln\dfrac{(2+x_1)(2-x_2)}{(2-x_1)(2+x_2)}$. ……………………………………………………… 8 分

因为 $(2+x_1)(2-x_2)-(2-x_1)(2+x_2)=4(x_1-x_2)<0$，

即 $(2+x_1)(2-x_2)<(2-x_1)(2+x_2)$，

又 $(2+x_1)(2-x_2)>0$，$(2-x_1)(2+x_2)>0$，

所以 $\dfrac{(2+x_1)(2-x_2)}{(2-x_1)(2+x_2)}<1$，则 $\ln\dfrac{(2+x_1)(2-x_2)}{(2-x_1)(2+x_2)}<0$，又 $a(x_1-x_2)>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，$f(x_1)>f(x_2)$. ……………………………………………………… 9 分

所以，$f(x)$ 在区间 $(-2,0)$ 上单调递减. ……………………………………………………… 10 分

所以 $f(x)>f(0)=1$. ……………………………………………………………………… 11 分

(3)【解析】由已知，$\forall x_1\in[-1,1]$，$\exists x_2\in[-1,1]$，使得 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$，

则只需 $[f(x)]_{\max}\leqslant[g(x)]_{\max}$ 即可. ……………………………………………………… 12 分

由(2)可知，$f(x)$ 在区间 $(-2,0)$ 上单调递减，根据(1)知，函数 $f(x)$ 的图象是中心对称图形，所以 $f(x)$ 在区间 $(-2,2)$ 上单调递减，$f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减.

则 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)_{\max}=f(-1)=-a+1+\ln 3$. …………………………………… 13 分

函数 $g(x)=2^x+2^{-x}+2a$，$x\in[-1,1]$，令 $t=2^x$，$x\in[-1,1]$，则 $t\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$.

令 $h(t)=t+\dfrac{1}{t}+2a$. 设 $t_1,t_2\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，且 $t_1<t_2$，

则 $h(t_1)-h(t_2)=t_1+\dfrac{1}{t_1}+2a-(t_2+\dfrac{1}{t_2}+2a)=t_1-t_2+\dfrac{1}{t_1}-\dfrac{1}{t_2}=\dfrac{(t_1t_2-1)(t_1-t_2)}{t_1t_2}$，

当 $t_1,t_2\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$ 时，$h(t_1)-h(t_2)>0$，故 $h(t)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 单调递减；

当 $t_1,t_2\in(1,2]$ 时，$h(t_1)-h(t_2)<0$，故 $h(t)$ 在区间 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 单调递增.

所以 $h(t)$ 的最大值为 $h\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 与 $h(2)$ 中的最大者，

因为 $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=h(2)=\dfrac{5}{2}+2a$，所以，$h(t)_{\max}=\dfrac{5}{2}+2a$，即 $g(x)_{\max}=\dfrac{5}{2}+2a$. ……………… 15 分

由 $[f(x)]_{\max}\leqslant[g(x)]_{\max}$，得 $-a+1+\ln 3\leqslant\dfrac{5}{2}+2a$，

解得 $a\geqslant-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln 3}{3}$，又 $a<0$.

所以，a 的取值范围是 $\left[-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln 3}{3},0\right)$. …………………………………………………… 17 分