文科数学参考解答及评分参考

一、选择题

1.【答案】C

【解析】由题意有 $A\cup B=\{2,3,4,5,6,8\}$，所以 $\complement_U(A\cup B)=\{1,7,9\}$.

【命题意图】本小题设置数学课程知识情境，设计集合运算问题，主要考查集合的并集与补集运算等基础知识；考查运算求解能力。

2.【答案】D

【解析】因为 $z=\dfrac{1+3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}-\mathrm{i}=\dfrac{(1+3\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}-\mathrm{i}=\dfrac{-2+4\mathrm{i}}{2}-\mathrm{i}=-1+\mathrm{i}$，所以 $|z|=\sqrt{2}$.

【命题意图】本小题设置数学课程知识情境，设计复数运算问题，主要考查复数的乘除法，减法运算，复数的模的基础知识；考查运算求解能力，数学运算素养。

3.【答案】B

【解析】根据散点图，去掉 A 点后，可知相关系数 r 的值变大，决定系数 R^2 变大，残差平方和变小，解释变量 x 与预报变量 y 相关性变强，故 A，C，D 错误，B 正确.

【命题意图】本小题主要考查两个变量的相关性、回归方程等基本知识，考查统计与概率思想以及应用能力，考查直观想象、数据分析、数学建模等素养。

4.【答案】A

【解析】因 D,E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB,AC 的中点，$\overrightarrow{DE}=(3,4)$，所以 $\overrightarrow{BC}=(6,8)$，令 $C(x,y)$，因为 $B(-2,-3)$，所以 $\overrightarrow{BC}=(x+2,y+3)=(6,8)$，解得 $x=4,y=5$，即点 C 的坐标为 $(4,5)$.

【命题意图】本小题设置数学课程知识情境，设计向量问题，主要考查三角形中位线定理，平行向量，向量减法运算，向量的几何意义等基础知识；考查运算求解能力，化归与转换思想；考查数学运算，数学抽象素养。

5.【答案】A

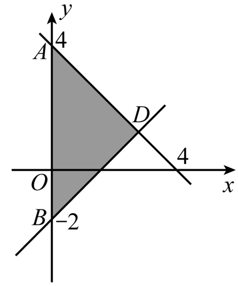
【解析】由题意有 $a_2=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$，$a_3=\dfrac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=-\dfrac{1}{2}$，$a_4=\dfrac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{2}+1}=-3$，$a_5=\dfrac{-3-1}{-3+1}=2=a_1$，

……，即 $a_{n+4}=a_n$，所以数列 $\{a_n\}$ 是周期为 4 的周期数列，$a_{2024}=a_{505\times4+4}=a_4=-3$.

【命题意图】本小题设置数学课程知识情境，设置周期数列问题，主要考查数列的递推公式，周期数列等基础知识；考查数学运算能力，推理论证能力；考查数学运算、逻辑推理素养。

6.【答案】B

【解析】平面区域 Ω 为如图所示的阴影部分的$\triangle ABD$ 及其内部，直线 $z=x-2y$ 过点 $B(0,-2)$ 时，$x-2y$ 取得最大值 4.



【命题意图】本小题设置数学课程知识情境，设计线性规划问题，主要考查不等式组表示的可行域，线性目标函数的最值等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，数形结合思想；考查数学建模和数学抽象、逻辑推理素养。

7.【答案】C

【解析】由 $\sin x+\cos x>\frac{\sqrt{6}}{2}$ 可得 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$\frac{\pi}{4}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，则 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{\sqrt{3}}{2}$时，$\frac{\pi}{3}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{2\pi}{3}$，即$\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}$，故所求概率为 $P=\frac{\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$.

【命题意图】本小题主要考查几何概型等基本知识，考查化归与转化、统计与概率思想和计算求解等数学能力，考查直观想象、数学运算等素养。

8.【答案】D

【解析】由 $f(x)=\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，其最小值为$-\sqrt{2}$，选项 A 错误；当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，$f(x)$先增后减，选项 B 错误；$f(x)$的最小正周期为 π，选项 C 错误；$g(x)=\sqrt{2}\cos 2x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位得到的图象对应的函数为 $y=\sqrt{2}\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\right]=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，选项 D 正确.

【命题意图】本小题设置数学课程学习情境，设计三角函数图象性质问题，主要考查三角函数的最值，单调性，对称性，图象平移等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，化归与转换思想；考查数学运算和逻辑推理素养。

9.【答案】B

【解析】因为 EF 是$\triangle BCD$ 的中位线，所以 $EF\parallel BD$. 因为 $BD\not\subset$平面 PEF，所以 $BD\parallel$平面 PEF. ①正确. 因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $BD\perp AC$，所以 $BD\perp PG$，所以 $BD\perp$平面 PAC，所以平面 $PAC\perp$平面 $ABCD$. ②正确. 因为 $CG\perp EF$，$PG\perp EF$，所以$\angle PGC$ 是二面角 $P-EF-C$ 的平面角. 在旋转过程中，当$\angle PGC=90^\circ$时，平面 $PEF\perp$平面 $ABCD$. 由 $AC\perp EF$ 易知此时 $AC\perp$平面 PEF，显然 $PF\perp AC$. ③错误.

【命题意图】本小题主要考查空间点、线、面的位置关系，直线与平面平行，直线与平面垂直，平面与平面垂直，直线与平面所成角，二面角等基础知识，考查推理论证、空间想象、运算求解能力，考查逻辑推理、直观想象等素养。

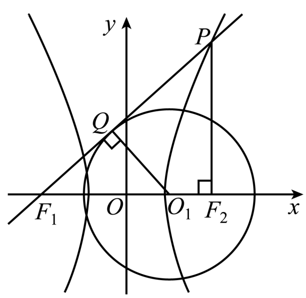
10.【答案】D

【解析】当 $a=0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x$，大致图象可以为①；当 $a\neq 0$ 时，$f'(x)=a\left(x+1+\dfrac{1}{a}\right)\mathrm{e}^x$，若 $a>0$，可知 $x<-1-\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；$x>-1-\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，且 $x<-1-\dfrac{1}{a}$，$f(x)<0$，大致图象可以为②；同理，$a<0$，大致图象可以为③或④.

【命题意图】本小题主要考查函数图象和性质、导数等基础知识，考查函数与方程、数形结合思想、化归与转化等数学思想，考查推理论证、运算求解等数学能力，考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等素养。

11.【答案】D

【解析】如图，设 $O_1\left(\dfrac{c}{2},0\right)$，直线与圆的切点为 Q，依题意易知 $\triangle F_1O_1Q\backsim\triangle F_1PF_2$，则 $\left|\dfrac{F_1Q}{F_1F_2}\right|=\left|\dfrac{QO_1}{PF_2}\right|$，即 $\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}c\right)^2-c^2}}{2c}=\dfrac{c}{\dfrac{b^2}{a}}$，即 $\sqrt{5}\,b^2=4ac$，$\sqrt{5}(c^2-a^2)=4ac$，所以 $\sqrt{5}\,c^2-4ac-\sqrt{5}\,a^2=0$，即 $\sqrt{5}\,e^2-4e-\sqrt{5}=0$. 于是 $(\sqrt{5}\,e+1)(e-\sqrt{5})=0$，即 $e=\sqrt{5}$.

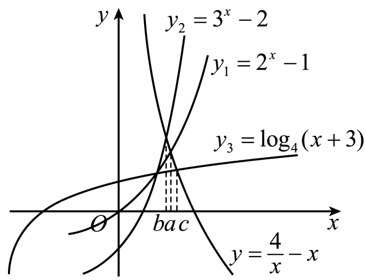


【命题意图】本小题主要考查直线与圆的位置关系，直线与双曲线的位置关系，双曲线的离心率等基础知识，考查考生数形结合思想，逻辑推理能力、运算求解能力，考查数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算等素养。

12.【答案】B

【解析】依题意，$\dfrac{4}{a}-a=2^a-1$，$\dfrac{4}{b}-b=3^b-2$，$\dfrac{4}{c}-c=\log_4(c+3)$. 设函数 $y=\dfrac{4}{x}-x$，$y_1=2^x-1$，

$y_2=3^x-2$，$y_3=\log_4(x+3)$. 由 $y=\frac{4}{x}-x$ 得 $y'=-\frac{4}{x^2}-1<0$，可知 $x>0$ 时，函数 $y=\frac{4}{x}-x$ 单调递减. 在同一坐标系中，分别作出函数 $y=\frac{4}{x}-x$，$y_1=2^x-1$，$y_2=3^x-2$，$y_3=\log_4(x+3)$ 的图象，结合图象可知，$b<a<c$，故选 B.



【命题意图】本小题以指数函数、对数函数、幂函数等构成新函数为载体，考查函数的图象和性质、导数的应用等基础知识，考查化归与转化、数形结合、函数与方程等数学思想，综合考查推理论证、运算求解等数学能力和创新能力，考查数学抽象、逻辑推理、直观想象等素养。

二、填空题

13.【答案】-4

【解析】由 $f(-2)=4^{-2}=2^{-4}$，所以 $f[f(-2)]=f(2^{-4})=\log_2 2^{-4}=-4$.

【命题意图】本小题设置数学课程知识情境，设计分段函数求值问题，主要指数运算，对数运算，分段函数等基础知识；考查运算求解能力，应用意识，考查数学运算等素养。

14.【答案】$y=x$

【解析】依题意，$f(x)=x^2-x+1$，$f'(x)=2x-1$，$f'(1)=1$，$f(1)=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处切线方程为 $y-1=x-1$，即 $y=x$.

【命题意图】本小题主要考查导数的应用等基础知识，考查化归与转化等数学思想，考查推理论证、化归与转化、运算求解等数学能力，考查逻辑推理、数学运算等素养。

15.【答案】$2^{n+1}-n-2$

【解析】依题意，由 $a_{n+1}-a_n=2^n$ 得 $(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2=\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}=2^n-2$，即 $a_n-a_1=2^n-2$，因为 $a_1=1$，所以 $a_n=2^n-1$，所以 $S_n=2+2^2+\cdots+2^n-n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-2-n$.

【命题意图】本小题设置数学课程学习情境，设置递推数列问题，主要考查递推数列的通项公式，叠项相消法，等比数列前 n 项和公式等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，化归与转化思想，应用意识；考查数学运算和逻辑推理素养。

16.【答案】$\frac{4\sqrt{2}}{3}$

【解析】设球心为 O,圆锥底面圆心为 O_1,圆锥顶点为 P,圆锥底面圆半径为 r. 由球体的对称性,易知 O_1 在线段 PO 上时体积不可能最大,即 O_1 在线段 PO 的延长线上,则圆锥的高为 $2+\sqrt{4-r^2}$,圆锥的体积 $V(r)=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot(2+\sqrt{4-r^2})$,$0<r\leqslant 2$. 记 $\sqrt{4-r^2}=t$,则 $0\leqslant t<2$. 所以 $V=\frac{1}{3}\pi(4-t^2)(2+t)=\frac{1}{3}\pi(-t^3-2t^2+4t+8)$,$0\leqslant t<2$. 因为 $V'=\frac{1}{3}\pi(-3t^2-4t+4)=\frac{1}{3}\pi(-3t+2)(t+2)$,所以 V 在 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 上递增,在 $\left(\frac{2}{3},2\right)$ 上递减. 所以当 $t=\frac{2}{3}$ 即 $r=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 时圆锥的体积最大.

【命题意图】本小题主要考查圆锥的结构特征,圆锥体积,球体结构特征,函数最值,导数的应用等基础知识,考查考查数形结合、函数与方程思想,考查推理论证、空间想象、运算求解能力,考查数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算等素养。

三、解答题

17.【解析】(1) $K^2=\frac{550\times(100\times100-50\times300)^2}{150\times400\times400\times150}\approx3.819>2.706$, ………… 4 分

因此,有 90% 的把握认为该校学生选择课外活动类别与性别有关系. ………… 6 分

(2) 这 6 名同学中女生有 2 名,记为 A_1,A_2,男生有 4 名,记为 B_1,B_2,B_3,B_4.

从这 6 名同学中随机抽取 2 名的所有基本事件有:(A_1,A_2),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_1,B_3),(A_1,B_4),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_2,B_3),(A_2,B_4),(B_1,B_2),(B_1,B_3),(B_1,B_4),(B_2,B_3),(B_2,B_4),(B_3,B_4),共 15 个.

其中,至少有 1 名女生的基本事件有 9 个.

所以,所抽取的 2 名同学中至少有 1 名女生的概率为 $\frac{9}{15}$ 即 $\frac{3}{5}$. ………… 12 分

【命题意图】本小题考查统计案例、卡方分布、古典概型等基础知识;考查统计与概率思想;考查运算求解、数据处理以及应用意识,考查数学运算、数据处理、数学建模等素养。

18.【解析】(1) 证明:因为在 $\triangle PAC$ 中,$\angle APC=90^\circ$,$PA=\sqrt{3}$,$PC=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以 $AC=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. ………… 1 分

又因为 $\angle PMA=90^\circ$,所以 $AP\cdot PC=AC\cdot PM$,

所以 $PM=1$,$AM=\sqrt{2}$. ………… 2 分

在 $\triangle ABM$ 中,由余弦定理可得 $BM=\sqrt{AB^2+AM^2-2AB\cdot AM\cdot\cos\angle CAB}=2$,

所以 $AM^2+BM^2=AB^2$.

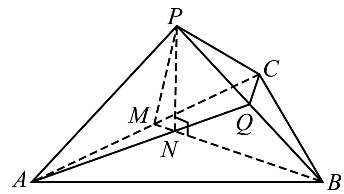
因此，$BM\perp AM$，即 $BM\perp AC$. …………………………………………………… 4 分

又 $PM\perp AC$，

所以 $AC\perp$平面 PBM. ………………………………………………………………… 6 分

(2)因为点 Q 为边 PB 的中点，

所以 $V_{P-ACQ}=\frac{1}{2}V_{P-ABC}$. ………………………………… 7 分



由(1)知 $AC\perp$平面 PBM，

而 $AC\subset$平面 ABC，所以平面 $PBM\perp$平面 ABC.

又平面 $PBM\cap$平面 $ABC=BM$，

过点 P 作 $PN\perp$平面 ABC 于 N 点，则 N 点必在直线 BM 上.

于是，当点 M 与点 N 重合时，点 P 到平面 ABC 的距离最大，

且最大距离为 $|PM|=1$. ………………………………………………………………… 9 分

因为 $AC=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$BM=2$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BM|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$， ………………………………………………… 10 分

故 $V_{P-ACQ}\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times1=\frac{\sqrt{2}}{4}$， ………………………………………………… 11 分

所以三棱锥 $P-ACQ$ 的体积有最大值，最大值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$. ……………………………………… 12 分

【命题意图】本小题主要考查空间点、线、面位置关系，直线与直线垂直，直线与平面垂直的判定，三棱锥的体积等基础知识，考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力，考查逻辑推理、直观想象、数学运算等素养。

19.【解析】(1)由 $2a\cos C-c\cos B=b\cos C$ 得 $2a\cos C=c\cos B+b\cos C$，

根据正弦定理可得 $2\sin A\cos C=\sin C\cos B+\sin B\cos C$，……………………………………… 2 分

因为 $\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(B+C)=\sin A$，

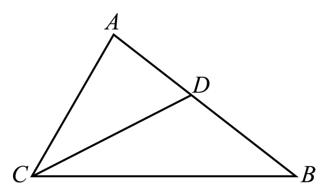
所以 $2\sin A\cos C=\sin A$， ………………………………………………………………… 4 分

因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A\neq0$，

所以 $\cos C=\frac{1}{2}$，

由 $0<C<\pi$，

所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………… 6 分



(2)由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab=18\sqrt{3}$，

所以 $ab=72$，…………………………………………………………………… 7 分

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}b\cdot CD\cdot\sin\angle ACD+\frac{1}{2}a\cdot CD\cdot\sin\angle BCD$，

因为 CD 为角平分线，所以$\angle ACD=\angle BCD=\frac{\pi}{6}$，又 $CD=4\sqrt{3}$，

所以有$\frac{1}{2}b\times 4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\times 4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=18\sqrt{3}$，

所以 $a+b=18$，…………………………………………………………………… 10 分

由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab$

$=(a+b)^2-3ab=18^2-3\times 72=108$，

所以 $c=6\sqrt{3}$. …………………………………………………………………… 12 分

【命题意图】本小题设置数学课程知识情境，设计解三角形问题，主要考查三角恒等变换，正弦定理，余弦定理，三角形角平分线性质，三角形面积等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，抽象概括能力，应用意识；考查数学运算与数学抽象素养。

20.【解析】(1)由题意得 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$.

由$\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{OF}=0$，得 $M\left(\frac{p}{2},p\right)$. ……………………………………………… 1 分

从而$\triangle OFM$ 的面积 $S_{\triangle OFM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot p=1$，则 $p=2$. …………………………………… 3 分

所以，抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. ……………………………………………… 4 分

(2)设 $M\left(\frac{t^2}{4},t\right)(t>0)$，则$\overrightarrow{MF}=\left(1-\frac{t^2}{4},-t\right)$，$\overrightarrow{OF}=(1,0)$.

由$\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{OF}=-3$，得 $1-\frac{t^2}{4}=-3$，即 $t=4$.

所以，此时 $M(4,4)$. ……………………………………………………………… 6 分

由题意可知，l 斜率必不等于 0，于是可设 l：$x=my+n$.

由$\begin{cases}x=my+n,\\ y^2=4x\end{cases}$ 可得 $y^2-4my-4n=0$. ……………………………………… 7 分

上述方程的判别式满足 $\Delta=(-4m)^2-4\cdot(-4n)>0$，即 $m^2>-n$.

设 $A\left(\frac{{y_1}^2}{4},y_1\right)$，$B\left(\frac{{y_2}^2}{4},y_2\right)$.

根据韦达定理有：$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4n$. …………………………………… 8 分

因为 $k_{MA}\cdot k_{MB}=-2$，

所以$\dfrac{y_1-4}{\dfrac{y_1^2}{4}-4}\cdot\dfrac{y_2-4}{\dfrac{y_2^2}{4}-4}=-2$，$\dfrac{4}{y_1+4}\cdot\dfrac{4}{y_2+4}=-2$，

于是 $y_1y_2+4(y_1+y_2)+24=0$.

所以，$-4n+16m+24=0$，即 $n=4m+6$. …………………………………………………… 10 分

故直线 l 的方程为 $x=my+4m+6$，即 $x-6=m(y+4)$，

所以直线 l 恒过定点 $N(6,-4)$. …………………………………………………………… 12 分

【命题意图】本小题主要考查抛物线的标准方程、简单几何性质，直线与抛物线位置关系，平面向量的数量积等基础知识，考查数形结合，函数与方程，化归与转化思想，考查逻辑推理、运算求解能力，考查数学抽象、数学运算、逻辑推理、直观想象等素养。

21.【解析】(1)由 $f(x)=e^x-ax-1$，得 $f'(x)=e^x-a$， ………………………………………… 1 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增，$f(x)$ 不存在极值. ……………………………… 2 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $x=\ln a$，

若 $x<\ln a$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；若 $x>\ln a$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以 $x=\ln a$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

所以，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 存在极值，

综上所述，$f(x)$ 存在极值时，a 的取值范围是 $(0,+\infty)$. ………………………………………… 4 分

(2)欲证不等式 $f(x)>x-\sin x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立，

只需证明 $e^x+\sin x-(a+1)x-1>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立. ……………………………… 5 分

设 $g(x)=e^x+\sin x-(a+1)x-1$，

则 $g'(x)=e^x+\cos x-(a+1)$，

令 $m(x)=g'(x)=e^x+\cos x-(a+1)$，则 $m'(x)=e^x-\sin x$.

可知，$x\in(0,+\infty)$ 时，$m'(x)>0$，

则 $m(x)$ 即 $g'(x)$ 单调递增，

所以 $g'(x)>g'(0)=1-a$. …………………………………………………………………………… 8 分

因为 $a\leqslant 1$，所以 $g'(0)=1-a\geqslant 0$，

故 $x\in(0,+\infty)$，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 单调递增.

所以 $g(x)>g(0)=0$，

即 $a\leqslant 1$，$x\in(0,+\infty)$ 时，不等式 $f(x)>x-\sin x$ 恒成立. …………………………… 12 分

【命题意图】本小题主要考查导数几何意义、极值，函数与导数的综合应用等基础知识，考查化归与转化、函数与方程等数学思想，考查推理论证、运算求解等数学能力，考查逻辑推理、数学抽象、数学运算等素养。

选考题

22.【解析】(1)由$\begin{cases}x=1+2\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$知$(x-1)^2=4\cos^2\alpha, y^2=4\sin^2\alpha$,

则曲线 C 的普通方程为$(x-1)^2+y^2=4$. ………………………………………………………… 2 分

因为直线 l 的方程为 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,即 $\rho\sin\theta-\rho\cos\theta=3$.

由$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$可得 $x-y+3=0$.

所以直线 l 的直角坐标方程为 $x-y+3=0$. ………………………………………………… 4 分

(2)由(1)可知,点 A 的坐标为$(-3,0)$.

因为$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$,所以 M 是线段 AB 的中点. ………………………………………………… 5 分

由题意,可设 $M(x,y)$,$B(1+2\cos\alpha,2\sin\alpha)$,

则$\begin{cases}2x=(1+2\cos\alpha)+(-3),\\ 2y=2\sin\alpha+0,\end{cases}$

即$\begin{cases}x=\cos\alpha-1,\\ y=\sin\alpha.\end{cases}$ ………………………………………………………………………………… 7 分

代入曲线 C 的方程,可得

$(\cos\alpha-1-1)^2+\sin^2\alpha=4$,即 $\cos^2\alpha-4\cos\alpha+4+\sin^2\alpha=4$.

解之可得,$\cos\alpha-1=-\frac{3}{4}$. ……………………………………………………………………… 9 分

此时,$\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$.

由此可知,两曲线有两个公共点,其直角坐标为$\left(-\frac{3}{4},\pm\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$. ……………………… 10 分

【命题意图】本小题考查参数方程与普通方程互化、极坐标方程与直角坐标方程互化、代入法求动点轨迹方程等基础知识,考查数形结合思想,考查推理论证、运算求解等能力,考查直观想象、逻辑推理、数学运算等素养。

23.【解析】(1)不存在 a,b,c,使得$\frac{1}{a}+\frac{9}{b+c}\in(0,5)$. 理由如下:

因为 a,b,c 都是正数,且 $a+b+c=3$,所以 $b+c=3-a>0$,

所以$\frac{1}{a}+\frac{9}{b+c}=\frac{1}{a}+\frac{9}{3-a}=\frac{1}{3}[a+(3-a)]\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{3-a}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(10+\frac{3-a}{a}+\frac{9a}{3-a}\right)\geqslant\frac{1}{3}\left(10+2\sqrt{\frac{3-a}{a}\cdot\frac{9a}{3-a}}\right)=\frac{16}{3}$,

当且仅当$\frac{3-a}{a}=\frac{9a}{3-a}$，即$a=\frac{3}{4}$，$b+c=\frac{9}{4}$时取等号，

即$\frac{1}{a}+\frac{9}{b+c}$的最小值为$\frac{16}{3}$，

所以，不存在a,b,c，使得$\frac{1}{a}+\frac{9}{b+c}\in(0,5)$. ………………………………………… 5分

(2)【证明】

$(\sqrt{3+a}+\sqrt{3+b}+\sqrt{3+c})^2$

$=9+(a+b+c)+2\sqrt{3+a}\cdot\sqrt{3+b}+2\sqrt{3+b}\cdot\sqrt{3+c}+2\sqrt{3+a}\cdot\sqrt{3+c}$

$\leqslant 12+(3+a)+(3+b)+(3+b)+(3+c)+(3+a)+(3+c)$

$=30+2(a+b+c)$

$=36$.

当且仅当$a=b=c=1$时等号成立，

所以$\sqrt{3+a}+\sqrt{3+b}+\sqrt{3+c}\leqslant 6$. ………………………………………………… 10分

【命题意图】本小题主要考查均值不等式应用、不等式的证明方法等基础知识，考查分类与整合思想，考查运算求解、推理论证等数学能力，考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等素养。