

26 届高二考试数学参考答案

题序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	A	C	D	B	A	D	B	D	AB	AB	ACD	$x+y+2=0$	4	$\sqrt{2}-1$

【评分细则】

【1】第 1~8 题,凡与答案不符的均不得分.

【2】第 9,10 题,全部选对的得 6 分,有选错的不得分,每选对一个得 3 分;第 11 题,全部选对的得 6 分,有选错的不得分,每选对一个得 2 分.

【3】第 12~14 题,凡与答案不符的均不得分.

1. A 【解析】本题考查两条直线平行的充要条件,考查数学运算的核心素养.

因为 $l_1 // l_2$, 所以 $(a+2)a=8$, 解得 $a=2$ 或 -4 .

当 $a=2$ 时, $l_1: 4x-2y-1=0$, $l_2: 4x-2y-1=0$, 此时两直线重合, 舍去.

当 $a=-4$ 时, $l_1: -2x-2y-1=0$, $l_2: 4x+4y-7=0$, 此时 $l_1 // l_2$.

故“ $l_1 // l_2$ ”的充要条件是“ $a=-4$ ”.

2. C 【解析】本题考查空间向量的基底,考查数学运算的核心素养.

对于 A, 设 $3a-b=x(3c+b)+y(a+c)$, 解得 $\begin{cases} x=-1, \\ y=3, \end{cases}$

所以 $3a-b, 3c+b, a+c$ 共面, 不能构成空间的一组基底, 则 A 不符合条件.

对于 B, 设 $a+b=x(3b+c)+y(3a-c)$, 解得 $x=y=\frac{1}{3}$,

所以 $a+b, 3b+c, 3a-c$ 共面, 不能构成空间的一组基底, 则 B 不符合条件.

对于 C, 设 $a+b+c=x(a+b)+y(b+c)$, x, y 无实数解,

所以 $a+b+c, a+b, b+c$ 不共面, 能构成空间的一组基底, 则 C 符合条件.

对于 D, 设 $a+b=x(2a+b+c)+y(c-b)$, 解得 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=-\frac{1}{2}, \end{cases}$

所以 $a+b, 2a+b+c, c-b$ 共面, 不能构成空间的一组基底, 则 D 不符合条件.

3. D 【解析】本题考查点与圆的位置关系,考查数学运算的核心素养.

因为方程 $x^2+y^2+4x-2y+t-2=0$ 表示圆, 所以 $16+4-4(t-2)>0$, 解得 $t<7$.

又点 $P(-1, 3)$ 在圆外, 所以 $(-1)^2+3^2+4(-1)-2\times 3+t-2>0$, 解得 $t>2$, 所以 t 的取值范围为 $2<t<7$.

4. B 【解析】本题考查空间向量的线性表示,考查数学运算的核心素养.

由题意知 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=-\frac{4}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$,

因为 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$, 所以 $x=-\frac{4}{5}, y=\frac{1}{2}, z=\frac{1}{2}$, 则 $5x+y+z=-3$.

5. A 【解析】本题考查点到平面的距离,考查直观想象的核心素养.

因为 $\overrightarrow{PQ} = (3, 2, 2)$, 所以点 Q 到平面 α 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|3-4+4|}{\sqrt{1+4+4}} = 1$.

6. D 【解析】本题考查用向量法求三棱锥的体积,考查直观想象的核心素养与空间想象能力.

由 $\overrightarrow{OA} = (-1, 0, 2)$, $\overrightarrow{OB} = (2, 2, 1)$, $\overrightarrow{OC} = (4, -4, 2)$, 得 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$,
所以 $OA \perp OB$, $OA \perp OC$. 又 $OB \cap OC = O$, $OB, OC \subset$ 平面 BOC , 所以 $OA \perp$ 平面 BOC .

因为 $\cos \langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OC}|} = \frac{2}{3 \times 6} = \frac{1}{9}$, 所以 $\sin \langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle = \frac{4\sqrt{5}}{9}$,

所以 $V_{O-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle BOC} \cdot |\overrightarrow{OA}| = \frac{1}{6} |\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OC}| \sin \angle BOC \cdot |\overrightarrow{OA}| = \frac{1}{6} \times 3 \times 6 \times \frac{4\sqrt{5}}{9} \times \sqrt{5} = \frac{20}{3}$.

7. B 【解析】本题考查直线与圆的位置关系,考查直观想象的核心素养与数形结合的数学思想.

曲线 $x = 1 + \sqrt{1 - (y-2)^2}$ 即为半圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 (x \geq 1)$, 半圆最下方的点 $M(1, 1)$, 直线 $kx - y - 3 = 0$ 为过 $P(0, -3)$ 的动直线, 当直线 $kx - y - 3 = 0$ 与半圆相切时,

有 $\frac{|k-5|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$, 解得 $k = \frac{12}{5}$. 当直线 $kx - y - 3 = 0$ 过 M 时, 有 $k = \frac{4}{1} = 4$, 因为直线 $kx - y - 3$

$= 0$ 与半圆有两个不同的交点, 所以 $\frac{12}{5} < k \leq 4$.

8. D 【解析】本题考查二面角的余弦值,考查直观想象、数学运算的核心素养.

(方法一)依题意, $PC \perp AC$, $AC \perp AB$, 则 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, $|\overrightarrow{CA}| = 2$, $|\overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{AB}| = 4$, 设二面角 $P-AC-B$ 的大小为 θ , 则 $\theta = \langle \overrightarrow{CP}, \overrightarrow{AB} \rangle$,

由 $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$,

得 $\overrightarrow{PB}^2 = \overrightarrow{PC}^2 + \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{AB}$,

因为 $|\overrightarrow{PB}| = 8$, 所以 $64 = 16 + 4 + 16 + 2 \times 4 \times 4 \cos \langle \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{AB} \rangle$, 解得 $\cos \langle \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{AB} \rangle = \frac{7}{8}$,

则 $\cos \theta = -\cos \langle \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{AB} \rangle = -\frac{7}{8}$.

(方法二)因为 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \times 2\sqrt{5} \times \frac{36-64}{2 \times 2\sqrt{5} \times 4} = -14$,

所以 $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{CP}| |\overrightarrow{AB}|} = \frac{-14}{4 \times 4} = -\frac{7}{8}$.

9. AB 【解析】本题考查空间向量的垂直、投影向量以及夹角,考查数学运算的核心素养.

对于 A, 因为 $2\mathbf{a} + \mathbf{b} = (10, -1, 4+m) = (10, -1, 0)$, 所以 $m = -4$, A 正确.

对于 B, 因为 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (3, -2, 2) \cdot (4, 3, m) = 12 - 6 + 2m = 0$, 得 $m = -3$, B 正确.

对于 C, 因为 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$, 所以 $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} = \frac{1}{3}$, 即 $\frac{2m+6}{m^2+25} = \frac{1}{3}$, 化简可得 $m^2 - 6m + 7 = 0$, 因为 $\Delta = 36 - 28 > 0$, 所以 m 有两个实数解, C 错误.

因为平面 B_1EC 就是平面 B_1AC , 所以平面 B_1AC 的一个法向量为 $\overrightarrow{BD_1}=(-2,-2,2)$,
 $\overrightarrow{A_1B}=(0,2,-2)$, 设直线 A_1B 与平面 B_1EC 所成的角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{BD_1} \rangle| = \left| \frac{\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{BD_1}}{|\overrightarrow{A_1B}| |\overrightarrow{BD_1}|} \right| = \frac{8}{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

故直线 A_1B 与平面 B_1EC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, C 正确.

对于 D, $\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$, $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$, 设 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda(-2,2,0)=(-2\lambda,2\lambda,0)$, 且 $0 \leq \lambda \leq 1$, 则 $\overrightarrow{A_1E}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AA_1}=(-2\lambda,2\lambda,-2)$.

设直线 CB_1 与直线 A_1E 所成的角为 α , $\overrightarrow{CB_1}=(2,0,2)$,

$$\cos \alpha = |\cos \langle \overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{A_1E} \rangle| = \left| \frac{\overrightarrow{CB_1} \cdot \overrightarrow{A_1E}}{|\overrightarrow{CB_1}| |\overrightarrow{A_1E}|} \right| = \frac{4\lambda+4}{\sqrt{8\lambda^2+4} \times 2\sqrt{2}} = \frac{\lambda+1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2\lambda^2+1}}.$$

令 $t=\lambda+1$, 因为 $0 \leq \lambda \leq 1$, 所以 $t \in [1, 2]$, 则 $\frac{1}{t} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

$$\text{所以 } \cos \alpha = \frac{t}{\sqrt{2} \times \sqrt{2t^2-4t+3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{t^2}-\frac{4}{t}+2}}.$$

$$\text{可求出 } \frac{3}{t^2}-\frac{4}{t}+2 \in \left[\frac{2}{3}, 1\right], \sqrt{\frac{3}{t^2}-\frac{4}{t}+2} \in \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 1\right],$$

$$\text{所以 } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{t^2}-\frac{4}{t}+2}} \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right],$$

故直线 CB_1 与直线 A_1E 所成角的余弦值的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, D 正确.

12. $x+y+2=0$ 【解析】本题考查直线的一般式方程, 考查数学运算的核心素养.

直线 l 的倾斜角为 135° , 则斜率为 -1 , 所以直线 l 的方程为 $y-1=-(x+3)$, 直线 l 的一般式方程为 $x+y+2=0$.

13. 4 【解析】本题考查圆的切线, 考查直观想象与数学运算的核心素养.

连接 CM, CN (图略). 因为 MN 是圆 C 的切线, 所以 $MN \perp CN$. 又 $|CM| = \sqrt{(4-1)^2 + (2+2)^2} = 5$, 所以 $|MN| = \sqrt{5^2 - 9} = 4$.

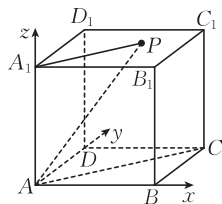
14. $\sqrt{2}-1$ 【解析】本题考查距离的新定义, 考查逻辑推理的核心素养与应用意识.

易知 $A(0,0,0)$, $C(2,2,0)$, $\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$.

因为 P 在上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内(含边界)运动, 且 $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{5}$,

所以 $|\overrightarrow{A_1P}|^2=5-4=1$, $|\overrightarrow{A_1P}|=1$, 即 P 在上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内, 点 P

在以 A_1 为圆心, 1 为半径的圆周上, 可设 $P(\cos \theta, \sin \theta, 2)$, $\overrightarrow{AP}=(\cos \theta, \sin \theta, 2)$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP})=|2-\cos \theta|+|2-\sin \theta|+2=2-\cos \theta+2$



$$-\sin \theta+2=6-\sqrt{2} \sin \left(\theta+\frac{\pi}{4}\right), \theta \in\left[0, \frac{\pi}{2}\right] .$$

因为 $\frac{\pi}{4} \leqslant \theta+\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{3 \pi}{4}$, 所以 $\sin \left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \in\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, 则 $D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}) \in[6-\sqrt{2}, 5]$, 从而 $M-N=5-(6-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$.

15. 【解析】本题考查线线垂直与线面平行, 考查数学运算的核心素养.

证明: 以 A 为原点, $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A(0,0,0), B(0,1,0), C(2,2,0), D(2,0,0), S(0,0,2), M(1,1,1)$ 2 分

(1) 因为 $\overrightarrow{BM}=(1,0,1), \overrightarrow{DC}=(0,2,0)$, 3 分

所以 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DC}=1 \times 0+0 \times 2+1 \times 0=0$, 5 分

所以 $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{DC}$, 则 $BM \perp DC$ 6 分

(2) 因为 $AD \perp DC, AB \parallel DC$, 所以 $AB \perp AD$ 7 分

由 $SA \perp$ 底面 $ABCD$, 得 $AB \perp AS$ 8 分

又 $AS \cap AD=A$, 所以 $AB \perp$ 平面 SAD , 则向量 $\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$ 是平面

SAD 的一个法向量. 10 分

因为 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB}=1 \times 0+0 \times 1+1 \times 0=0$, 且 $BM \not\subset$ 平面 SAD , 12 分

所以 $BM \parallel$ 平面 SAD 13 分

【评分细则】

第(2)问也可用如下方法证明:

因为 $AD \perp DC, AB \parallel DC$, 所以 $AB \perp AD$ 7 分

由 $SA \perp$ 底面 $ABCD$, 得 $AB \perp AS$ 8 分

又 $AS \cap AD=A$, 所以 $AB \perp$ 平面 SAD , 则向量 $\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$ 是平面 SAD 的一个法向量.

..... 10 分

因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\overrightarrow{CD}$ 也是平面 SAD 的一个法向量, 11 分

由(1)知 $BM \perp CD$, 所以 $BM \parallel$ 平面 SAD 13 分

16. 【解析】本题考查两直线的位置关系, 考查数学运算的核心素养.

解: (1) 因为 $l_1 \perp l_2$, 所以 $m(6-m)+2m^2=m^2+6m=0$, 3 分

解得 $m=0$ 或 $m=-6$, 5 分

当 $m=0$ 时, l_1 不是直线, 舍去, 所以 $m=-6$ 7 分

(2) $l_2: (6-m)x+my+m^2-6m=0$, 可化为 $\frac{x}{m}+\frac{y}{6-m}=1$ 9 分

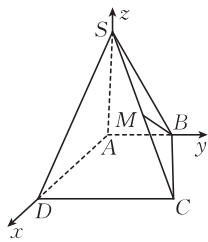
因为 l_2 与两坐标轴的正半轴围成三角形, 所以 $\begin{cases} m>0, \\ 6-m>0, \end{cases}$ 10 分

则 $0<m<6$, 11 分

所以 l_2 与两坐标轴的正半轴围成的三角形的面积 $S=\frac{1}{2}m(6-m)=-\frac{1}{2}(m-3)^2+\frac{9}{2}$,

..... 13 分

所以当 $m=3$ 时, 三角形的面积 S 取得最大值. 15 分



【评分细则】

【1】第(1)问也可用如下方法解答:

由直线 $l_1: mx + 2my - 8 = 0$ 知 $m \neq 0$, 1 分

所以直线 l_1 的斜率为 $-\frac{1}{2}$, 3 分

同理直线 l_2 的斜率为 $\frac{m-6}{m}$, 5 分

因为 $l_1 \perp l_2$, 所以 $-\frac{1}{2} \cdot \frac{m-6}{m} = -1$, 解得 $m = -6$ 7 分

【2】第(2)问中求三角形的面积时也可以这样解:

$$S = \frac{1}{2}m(6-m) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{m+6-m}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}, \text{ 当且仅当 } m=3 \text{ 时, 等号成立.}$$

17. 【解析】本题考查平面与平面垂直、直线与平面所成角的正弦值、两平面之间的夹角的余弦值, 考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

(1) 证明: 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, E, F 分别为矩形 ACC_1A_1 的边 AC, A_1C_1 的中点, 则 $EF \perp AC$, 2 分

又 $AB = BC$, 所以 $BE \perp AC$ 3 分

因为 $BE \cap EF = E, BE, EF \subset$ 平面 BEF , 所以 $AC \perp$ 平面 BEF 5 分

又 $AC \subset$ 平面 ACB_1 , 所以平面 $ACB_1 \perp$ 平面 BEF 6 分

(2) 解: 在直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 由(1)知, $EF \parallel AA_1$, 则 $EF \perp$ 平面 ABC , $BE \subset$ 平面 ABC , 有 $EF \perp BE$. 又 $AC \perp$ 平面

BEF , 所以 $\angle CBE$ 是 BC 与平面 BEF 所成的角, 即 $\sin \angle CBE = \frac{\sqrt{3}}{3}$

..... 8 分

又 $BE \perp AC$, 所以设 $CE = 1$, 则 $BC = \sqrt{3}, BE = \sqrt{2}, EF = \frac{BE}{\tan \angle BFE} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

$= \sqrt{2}$ 9 分

以 E 为原点, EB, EC, EF 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则

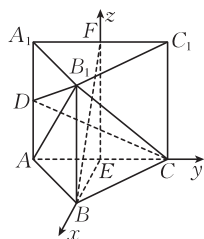
$$B(\sqrt{2}, 0, 0), C(0, 1, 0), B_1(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), D\left(0, -1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{DC} = \left(0, 2, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \overrightarrow{CB_1} = (\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}), \overrightarrow{CB} = (\sqrt{2}, -1, 0). \text{ 10 分}$$

$$\text{设平面 } DB_1C \text{ 的法向量为 } \mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DC} = 2y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}z_1 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CB_1} = \sqrt{2}x_1 - y_1 + \sqrt{2}z_1 = 0, \end{cases}$$

取 $y_1 = \sqrt{2}$, 得 $\mathbf{m} = (-3, \sqrt{2}, 4)$ 12 分

$$\text{设平面 } BB_1C \text{ 的法向量为 } \mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB} = \sqrt{2}x_2 - y_2 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB_1} = \sqrt{2}x_2 - y_2 + \sqrt{2}z_2 = 0, \end{cases} \text{ 取 } y_2 = \sqrt{2},$$



得 $n = (1, \sqrt{2}, 0)$ 14 分

因为 $\cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| |n|} = \frac{(-3) \times 1 + \sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{2})^2 + 4^2} \times \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2}} = -\frac{1}{9},$

所以平面 BB_1C 与平面 DB_1C 夹角的余弦值是 $\frac{1}{9}$ 15 分

18. 【解析】本题考查直线与圆的综合,考查逻辑推理、数学运算的核心素养.

解:(1)线段 AB 的中垂线方程为 $y - \frac{5+4}{2} = -\frac{3-2}{5-4} \left(x - \frac{3+2}{2} \right)$, 即 $y = -x + 7$,

所以圆心 O_1 在直线 $y = -x + 7$ 上. 2 分

又圆心 O_1 在直线 $4x - 3y = 0$ 上, 所以直线 $y = -x + 7$ 与直线 $4x - 3y = 0$ 的交点就是圆心

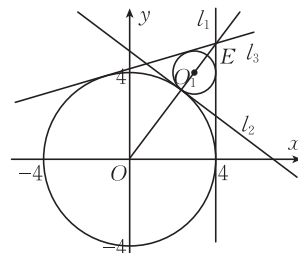
O_1 . 解方程组 $\begin{cases} y = -x + 7, \\ 4x - 3y = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 3, \\ y = 4, \end{cases}$ 即 $O_1(3, 4)$ 4 分

因为圆 O_1 的半径 $|O_1A| = \sqrt{(3-3)^2 + (4-5)^2} = 1$, 所以圆 O_1 的标准方程为 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$ 5 分

(2) 只要写出 $l_1: x = 4$ 或 $l_2: 3x + 4y - 20 = 0$ 或 $l_3: 7x - 24y + 100 = 0$ 之一就可以. 8 分

(因为圆 O 与圆 O_1 的圆心距为 5, 等于两圆的半径之和, 所以两圆外切, 结合图形可求出公切线 $l_1: x = 4$.

圆 O 与圆 O_1 的方程相减可得公切线 $l_2: 3x + 4y - 20 = 0$.



另外一条公切线过两圆的连心线 $4x - 3y = 0$ 与 $l_1: x = 4$ 的交点 $E(4, \frac{16}{3})$, 设 $l_3: y - \frac{16}{3} = k_0(x - 4)$, 因为原点 O 到 l_3 的距离为 4,

所以 $\frac{\left| \frac{16}{3} - 4k_0 \right|}{\sqrt{1+k_0^2}} = 4$, 解得 $k_0 = \frac{7}{24}$, 所以 $l_3: y - \frac{16}{3} = \frac{7}{24}(x - 4)$, 即 $7x - 24y + 100 = 0$

(3) 显然当直线的斜率不存在时, 只要直线与圆 O 交于 P, Q 两点, 根据对称性恒有 $\angle PMO = \angle QMO$ 9 分

当直线的斜率存在时, 设经过点 T 的直线 $y = kx + b$ 与圆 O 交于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 两

点. 由 $\begin{cases} y = kx + b, \\ x^2 + y^2 = 16, \end{cases}$ 得 $(1+k^2)x^2 + 2kbx + b^2 - 16 = 0$,

所以 $\Delta = 4k^2b^2 - 4(1+k^2)(b^2 - 16) > 0$, 且 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2kb}{1+k^2}, \\ x_1x_2 = \frac{b^2 - 16}{1+k^2}. \end{cases}$ 11 分

由 $\angle PMO = \angle QMO$, 得 $k_{PM} + k_{QM} = 0$, 即 $\frac{y_1}{x_1 - 8} + \frac{y_2}{x_2 - 8} = 0$,

所以 $y_1(x_2 - 8) + y_2(x_1 - 8) = 0$, 整理得 $(b - 8k)(x_1 + x_2) + 2kx_1x_2 - 16b = 0$ 14 分

将 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2kb}{1+k^2}, \\ x_1 x_2 = \frac{b^2-16}{1+k^2} \end{cases}$ 代入上式可得 $b = -2k$, 16 分

直线 $y = kx + b$ 即 $y = kx - 2k = k(x - 2)$, 该直线恒过点 $(2, 0)$,

所以存在满足条件的定点 $T(2, 0)$ 17 分

【评分细则】

第(1)问还可以用如下方法作答:

设圆 $O_1: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 且 $D^2 + E^2 - 4F > 0$,

因为圆心 $O_1(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ 在直线 $4x - 3y = 0$ 上, 所以 $4D = 3E$ 2 分

因为圆 O_1 过 $A(3, 5), B(2, 4)$ 两点,

所以 $\begin{cases} 9 + 25 + 3D + 5E + F = 0, \\ 4 + 16 + 2D + 4E + F = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 3D + 5E + F = -34, \\ 2D + 4E + F = -20, \end{cases}$ 3 分

两方程相减得 $D + E = -14$, 结合 $4D = 3E$, 可得 $D = -6, E = -8, F = 24$, 4 分

所以 $O_1: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$,

则圆 O_1 的标准方程为 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$ 5 分

19. 【解析】本题考查立体几何中直线和平面的方程, 考查直观想象、逻辑推理及数学运算的核心素养.

(1)解: 由直线 l_1 的点方向式方程为 $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{\sqrt{3}} = 1-z$, 可知直线 l_1 的一个方向向量为 $\mathbf{m}_1 = (2, \sqrt{3}, -1)$, 1 分

由平面 α_1 的一般式方程为 $x - \sqrt{3}y + 2z + 3 = 0$, 可知平面 α_1 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (1, -\sqrt{3}, 2)$, 2 分

设直线 l_1 与平面 α_1 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1 \rangle| = \left| \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{n}_1}{|\mathbf{m}_1| |\mathbf{n}_1|} \right| = \left| \frac{2-3-2}{\sqrt{8} \times \sqrt{8}} \right| = \frac{3}{8}$, 即直线 l_1 与平面 α_1 所成角的正弦值为 $\frac{3}{8}$ 4 分

(2)证明: 由平面 α_2 的一般式方程为 $x - 2y + 3z - 1 = 0$, 可知平面 α_2 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (1, -2, 3)$, 由平面 β_1 的一般式方程为 $2x - y - 3z + 4 = 0$, 可知平面 β_1 的一个法向量为 $\mathbf{n}_3 = (2, -1, 3)$.

设两平面的交线 l_2 的方向向量为 $\mathbf{m}_2 = (x_0, y_0, z_0)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = x_0 - 2y_0 + 3z_0 = 0, \\ \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = 2x_0 - y_0 - 3z_0 = 0, \end{cases}$

令 $z_0 = 1$, 则 $x_0 = 3, y_0 = 3$, 可得 $\mathbf{m}_2 = (3, 3, 1)$ 7 分

由平面 γ_1 的一般式方程为 $(m-2)x + (-2m+1)y + 3(m+1)z - 8 = 0$, 可知平面 γ_1 的一个法向量为 $\mathbf{n}_4 = (m-2, -2m+1, 3m+3)$, 8 分

则 $\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}_4 = (m-2) \times 3 + (-2m+1) \times 3 + (3m+3) \times 1 = 0$, 即 $\mathbf{m}_2 \perp \mathbf{n}_4$.

又 $l_2 \not\subset \gamma_1$, 所以 $l_2 // \gamma_1$ 9 分

(3)解:由平面 α_3 经过三点 $P(3,0,0), Q(2,1,-2), H(-1,4,3)$, 可得 $\overrightarrow{HP}=(4,-4,-3), \overrightarrow{QP}=(1,-1,2)$.

设侧面 ABB_1A_1 所在平面 α_3 的法向量为 $\mathbf{n}_5=(x_1, y_1, z_1)$, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{n}_5 = x_1 - y_1 + 2z_1 = 0, \\ \overrightarrow{HP} \cdot \mathbf{n}_5 = 4x_1 - 4y_1 - 3z_1 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } x_1=1, \text{ 解得 } y_1=1, z_1=0, \text{ 可得 } \mathbf{n}_5=(1,1,0). \quad \cdots 11 \text{ 分}$$

由平面 β_2 的一般式方程为 $2x - y + 3z + 4 = 0$, 可知平面 β_2 的一个法向量为 $\mathbf{n}_6=(2, -1, 3)$. $\cdots 12 \text{ 分}$

设平面 α_3 与平面 β_2 的交线 BB_1 的方向向量为 $\mathbf{m}_3=(x_2, y_2, z_2)$,

$$\begin{cases} \mathbf{m}_3 \cdot \mathbf{n}_5 = x_2 + y_2 = 0, \\ \mathbf{m}_3 \cdot \mathbf{n}_6 = 2x_2 - y_2 + 3z_2 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } x_2=1, \text{ 可得 } \mathbf{m}_3=(1, -1, -1). \quad \cdots 13 \text{ 分}$$

由平面 γ_2 的一般式方程为 $2x - 3my + mz + 6 = 0$, 可知平面 γ_2 的一个法向量为 $\mathbf{n}_7=(2, -3m, m)$, $\cdots 14 \text{ 分}$

由 $\mathbf{n}_7 \perp AA_1, AA_1 \parallel BB_1$, 得 $\mathbf{m}_3 \perp \mathbf{n}_7, \mathbf{m}_3 \cdot \mathbf{n}_7 = 2 + 3m - m = 0$, 解得 $m = -1$,

即 $\mathbf{n}_7=(2, 3, -1)$. $\cdots 16 \text{ 分}$

故平面 ABB_1A_1 与平面 ACC_1A_1 夹角的余弦值为 $|\cos \langle \mathbf{n}_5, \mathbf{n}_7 \rangle| = \left| \frac{\mathbf{n}_5 \cdot \mathbf{n}_7}{|\mathbf{n}_5| |\mathbf{n}_7|} \right| =$

$$\left| \frac{1 \times 2 + 1 \times 3}{\sqrt{2} \times \sqrt{14}} \right| = \frac{5\sqrt{7}}{14}. \quad \cdots 17 \text{ 分}$$

【评分细则】

【1】第(1)问中, 求出直线 l_1 的一个方向向量, 平面 α_1 的一个法向量各得 1 分, 求出直线 l_1 与平面 α_1 所成角的正弦值得 2 分.

【2】第(2)问中, 求出平面 α_2 的一个法向量、平面 β_1 的一个法向量各得 1 分.

【3】第(3)问中, 求出平面 β_2 的一个法向量、平面 γ_2 的一个法向量、平面 α_3 与平面 β_2 的交线的一个方向向量各得 1 分.

