

26 届高二考试数学参考答案

题序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	A	B	C	B	A	C	D	D	AB	ACD	ACD	$3\sqrt{3}$	$24; 24\sqrt{2}$	$\sqrt{2}-1$

【评分细则】

【1】第 1~8 题, 凡与答案不符的均不得分.

【2】第 9 题, 全部选对的得 6 分, 有选错的不得分, 每选对一个得 3 分; 第 10~11 题, 全部选对的得 6 分, 有选错的不得分, 每选对一个得 2 分.

【3】正确填写第 13 题第一空得 3 分, 第二空得 2 分.

1. A 【解析】本题考查多面体的棱和面的个数, 考查数学运算的核心素养.

平行六面体有 6 个面, 12 条棱, 符合题意. 其他三种几何体都不符合.

2. B 【解析】本题考查直线与平面的位置关系, 考查直观想象的核心素养.

若 $m \parallel n, m \parallel \alpha$, 则 n 可能在 α 内, A 错误.

若一条直线垂直于两个平面, 则这两个平面平行, B 正确.

若 $\alpha \perp \beta, m \subset \alpha$, 则 $m \parallel \beta$ 或 $m \subset \beta$ 或 m 与 β 相交, C 错误.

若 $m \parallel \alpha, m \parallel \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$ 或 α 与 β 相交, D 错误.

3. C 【解析】本题考查空间向量的基底, 考查数学运算的核心素养.

对于 A, 设 $3a - b = x(3c + b) + y(a + c)$, 解得 $\begin{cases} x = -1, \\ y = 3, \end{cases}$

所以 $3a - b, 3c + b, a + c$ 共面, 不能构成空间的一组基底, 则 A 不符合条件.

对于 B, 设 $a + b = x(3b + c) + y(3a - c)$, 解得 $x = y = \frac{1}{3}$,

所以 $a + b, 3b + c, 3a - c$ 共面, 不能构成空间的一组基底, 则 B 不符合条件.

对于 C, 设 $a + b + c = x(a + b) + y(b + c)$, x, y 无实数解,

所以 $a + b + c, a + b, b + c$ 不共面, 能构成空间的一组基底, 则 C 符合条件.

对于 D, 设 $a + b = x(2a + b + c) + y(c - b)$, 解得 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = -\frac{1}{2}, \end{cases}$

所以 $a + b, 2a + b + c, c - b$ 共面, 不能构成空间的一组基底, 则 D 不符合条件.

4. B 【解析】本题考查空间向量的线性表示, 考查数学运算的核心素养.

由题意知 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -\frac{4}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$,

因为 $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, 所以 $x = -\frac{4}{5}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$, 则 $5x + y + z = -3$.

5. A 【解析】本题考查点到平面的距离, 考查直观想象的核心素养.

因为 $\overrightarrow{PQ}=(3,2,2)$, 所以点 Q 到平面 α 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|3-4+4|}{\sqrt{1+4+4}} = 1$.

6. C 【解析】本题考查圆台的体积、圆柱的侧面积,考查数学运算的核心素养.

设圆台、圆柱的高分别为 h_1, h_2 , 圆台的上口半径和下口半径分别为 r_1, r_2 , 由 $2\pi \times 10h_2 = 1\,320$, 得 $h_2 = 22$, 所以 $h_1 = 38 - h_2 = 16$, 故 $V_{\text{圆台}} = \frac{\pi}{3}(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2) \times h_1 = (196 + 100 + 140) \times 16 = 6\,976$.

7. D 【解析】本题考查用向量法求三棱锥的体积,考查直观想象的核心素养与空间想象能力.

由 $\overrightarrow{OA}=(-1,0,2), \overrightarrow{OB}=(2,2,1), \overrightarrow{OC}=(4,-4,2)$, 得 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=0, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}=0$, 所以 $OA \perp OB, OA \perp OC$. 又 $OB \cap OC = O, OB, OC \subset \text{平面 } BOC$, 所以 $OA \perp \text{平面 } BOC$.

因为 $\cos \langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OC}|} = \frac{2}{3 \times 6} = \frac{1}{9}$, 所以 $\sin \langle \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle = \frac{4\sqrt{5}}{9}$,

所以 $V_{O-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle BOC} \cdot |\overrightarrow{OA}| = \frac{1}{6} |\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OC}| \sin \angle BOC \cdot |\overrightarrow{OA}| = \frac{1}{6} \times 3 \times 6 \times \frac{4\sqrt{5}}{9} \times \sqrt{5} = \frac{20}{3}$.

8. D 【解析】本题考查二面角的余弦值,考查直观想象、数学运算的核心素养.

(方法一)依题意, $PC \perp AC, AC \perp AB$, 则 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, |\overrightarrow{CA}| = 2, |\overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{AB}| = 4$, 设二面角 $P-AC-B$ 的大小为 θ , 则 $\theta = \langle \overrightarrow{CP}, \overrightarrow{AB} \rangle$,

由 $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$,

得 $\overrightarrow{PB}^2 = \overrightarrow{PC}^2 + \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{AB}$,

因为 $|\overrightarrow{PB}| = 8$, 所以 $64 = 16 + 4 + 16 + 2 \times 4 \times 4 \cos \langle \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{AB} \rangle$, 解得 $\cos \langle \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{AB} \rangle = \frac{7}{8}$,

则 $\cos \theta = -\cos \langle \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{AB} \rangle = -\frac{7}{8}$.

(方法二)因为 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \times 2\sqrt{5} \times \frac{36-64}{2 \times 2\sqrt{5} \times 4} = -14$,

所以 $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{CP}| |\overrightarrow{AB}|} = \frac{-14}{4 \times 4} = -\frac{7}{8}$

9. AB 【解析】本题考查空间向量的垂直、投影向量以及夹角,考查数学运算的核心素养.

对于 A, 因为 $2\mathbf{a} + \mathbf{b} = (10, -1, 4+m) = (10, -1, 0)$, 所以 $m = -4$, A 正确.

对于 B, 因为 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (3, -2, 2) \cdot (4, 3, m) = 12 - 6 + 2m = 0$, 得 $m = -3$, B 正确.

对于 C, 因为 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \cdot \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$, 所以 $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} = \frac{1}{3}$, 即 $\frac{2m+6}{m^2+25} = \frac{1}{3}$, 化简可得 $m^2 - 6m + 7 = 0$, 因为 $\Delta = 36 - 28 > 0$, 所以 m 有两个实数解, C 错误.

对于 D, 因为 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为钝角, 且 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线, 所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (3, -2, 2) \cdot (4, 3, m) = 12 - 6 + 2m = 6 + 2m < 0$, 解得 $m < -3$, D 错误.

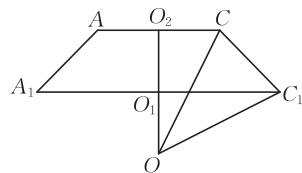
10. ACD 【解析】本题考查正四棱台的体积、球的表面积以及截面的面积,考查直观想象与逻辑推理的核心素养.

对于 A,B,由题意得几何体 Ω 是正四棱台,其上、下底面的边长分别为 2,4,侧棱长为 2,正四棱台的高为 $\sqrt{2^2 - \left(\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$,所以几何体 Ω 的体积 $V = \frac{1}{3}(2^2 + 2 \times 4 + 4^2) \times \sqrt{2} = \frac{28\sqrt{2}}{3}$,A 正确,B 错误.

对于 C,设正四棱台的上、下底面中心分别为 O_2, O_1 ,外接球的球心为 O ,如图所示,

易知 $A_1C_1 = 2AC = 4\sqrt{2}, O_1O_2 = \sqrt{2}$,设 $O_1O = x$,外接球的半径

为 r ,则 $\begin{cases} O_2C^2 + OO_2^2 = OC^2, \\ O_1C_1^2 + OO_1^2 = OC_1^2, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2}+x)^2 = r^2, \\ (2\sqrt{2})^2 + x^2 = r^2, \end{cases}$ 解得



$\begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ r = \sqrt{10}, \end{cases}$ 所以 $S_{\text{球}} = 4\pi \times 10 = 40\pi$,C 正确.

对于 D(作图略),设过 E, F, G 三点的平面与 DD_1 交于 H 点,易知 $EF \parallel GH$,四边形 $EF-GH$ 是等腰梯形, $EF = \frac{2+4}{2} = 3$. 延长 A_1A, D_1D 相交于点 P ,则 $\frac{AD}{GH} = \frac{PA}{PG}$. 因为 $AD = \frac{1}{2}A_1D_1$,所以 $PA = AA_1 = 2$,由 $\frac{AD}{GH} = \frac{PA}{PG}$,得 $\frac{2}{GH} = \frac{2}{2 + \frac{4}{3}}$,解得 $GH = \frac{10}{3}$. 延长 B_1B 与

A_1A 相交于点 P ,易知 $\triangle PAB$ 是边长为 2 的等边三角形,在 $\triangle PGF$ 中, $PF = 3, PG = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$,所以 $GF^2 = PF^2 + PG^2 - 2PF \cdot PG \cos 60^\circ = \frac{91}{9}$.

作 $FK \perp GH$,垂足为 $K, KG = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3} - 3\right) = \frac{1}{6}$,所以 $FK = \sqrt{\frac{91}{9} - \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{11\sqrt{3}}{6}$,四边形

$EFGH$ 的面积 $S_{\text{梯形}} = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{10}{3}\right) \times \frac{11\sqrt{3}}{6} = \frac{209\sqrt{3}}{36}$,D 正确.

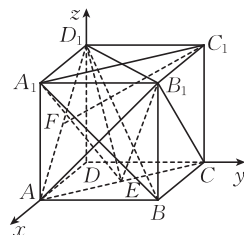
11. ACD 【解析】本题考查向量的线性表示,几何体的体积,空间角的三角函数值,考查直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

对于 A, $\overrightarrow{C_1F} = \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{D_1F} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$,故 A 正确.

对于 B,如图,连接 A_1C_1 ,因为 $AA_1 \parallel CC_1$ 且 $AA_1 = CC_1$,所以四边形 AA_1C_1C 为平行四边形,

则 $AC \parallel A_1C_1, A_1C_1 \subset \text{平面 } A_1B_1C_1D_1, AC \not\subset \text{平面 } A_1B_1C_1D_1$,所以 $AC \parallel \text{平面 } A_1B_1C_1D_1$.

因为 $E \in AC$,所以点 E 到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离等于点 A 到平面



$A_1B_1C_1D_1$ 的距离,即 $AA_1, S_{\triangle A_1B_1D_1} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$,

三棱锥 $B_1-EA_1D_1$ 的体积 $V_{B_1-EA_1D_1} = V_{E-A_1B_1D_1} = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$, 故 B 错误.

对于 C, 连接 AB_1, BD_1 , 以 D 为原点建立空间直角坐标系,

$A(2, 0, 0), B(2, 2, 0), D(0, 0, 0), A_1(2, 0, 2), B_1(2, 2, 2), C(0, 2, 0), D_1(0, 0, 2)$.

因为平面 B_1EC 就是平面 B_1AC , 所以平面 B_1AC 的一个法向量为 $\overrightarrow{BD_1} = (-2, -2, 2)$,

$\overrightarrow{A_1B} = (0, 2, -2)$, 设直线 A_1B 与平面 B_1EC 所成的角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{BD_1} \rangle| = \left| \frac{\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{BD_1}}{|\overrightarrow{A_1B}| |\overrightarrow{BD_1}|} \right| = \frac{8}{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

故直线 A_1B 与平面 B_1EC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, C 正确.

对于 D, $\overrightarrow{AC} = (-2, 2, 0), \overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 2)$, 设 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AC} = \lambda(-2, 2, 0) = (-2\lambda, 2\lambda, 0)$, 且 $0 \leq \lambda \leq 1$, 则 $\overrightarrow{A_1E} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AA_1} = (-2\lambda, 2\lambda, -2)$.

设直线 CB_1 与直线 A_1E 所成的角为 α , $\overrightarrow{CB_1} = (2, 0, 2)$,

$$\cos \alpha = |\cos \langle \overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{A_1E} \rangle| = \left| \frac{\overrightarrow{CB_1} \cdot \overrightarrow{A_1E}}{|\overrightarrow{CB_1}| |\overrightarrow{A_1E}|} \right| = \frac{4\lambda + 4}{\sqrt{8\lambda^2 + 4} \times 2\sqrt{2}} = \frac{\lambda + 1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2\lambda^2 + 1}}.$$

令 $t = \lambda + 1$, 因为 $0 \leq \lambda \leq 1$, 所以 $t \in [1, 2]$, 则 $\frac{1}{t} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

$$\text{所以 } \cos \alpha = \frac{t}{\sqrt{2} \times \sqrt{2t^2 - 4t + 3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{t^2} - \frac{4}{t} + 2}}.$$

$$\text{可求出 } \frac{3}{t^2} - \frac{4}{t} + 2 \in \left[\frac{2}{3}, 1\right], \sqrt{\frac{3}{t^2} - \frac{4}{t} + 2} \in \left[\frac{\sqrt{2}}{3}, 1\right],$$

$$\text{所以 } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{t^2} - \frac{4}{t} + 2}} \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right],$$

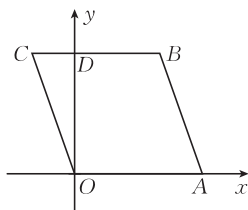
故直线 CB_1 与直线 A_1E 所成角的余弦值的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, D 正确.

12. $3\sqrt{3}$ 【解析】本题考查旋转体的侧面积, 考查数学运算的核心素养.

设半径为 r , 依题意得 $2\pi r \times 3 = \pi r \sqrt{3^2 + r^2}$, 解得 $r = 3\sqrt{3}$.

13. 24; $24\sqrt{2}$ 【解析】本题考查图形的直观图, 考查直观想象与数学运算的核心素养.

在直观图中, 设 B_1C_1 与 y' 轴交于点 D_1 , 则 $\angle A_1O_1D_1 = 45^\circ$, $C_1D_1 = O_1C_1 = 2$, $O_1D_1 = 2\sqrt{2}$, 在四边形 $OABC$ 中, 点 D_1 的对应点为 D , 且 $DC = 2$, $DB = 4$, $\angle ODC = 90^\circ$, $OD = 2O_1D_1 = 4\sqrt{2}$, 所以 $OC = \sqrt{2^2 + (4\sqrt{2})^2} = 6$. 因为 $OA = OC$, 四边形 $OABC$ 是平行四边形, 所以



四边形 $OABC$ 是菱形, 则它的周长为 24, 面积为 $6 \times 4\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$.

14. $\sqrt{2}-1$ 【解析】本题考查距离的新定义, 考查逻辑推理的核心素养与应用意识.

易知 $A(0,0,0), C(2,2,0), \overrightarrow{AC}=(2,2,0)$.

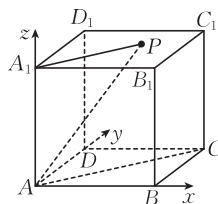
因为 P 在上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内(含边界)运动, 且 $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{5}$,

所以 $|\overrightarrow{A_1P}|^2=5-4=1, |\overrightarrow{A_1P}|=1$, 即 P 在上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内, 点 P

在以 A_1 为圆心, 1 为半径的圆周上, 可设 $P(\cos \theta, \sin \theta, 2), \overrightarrow{AP}=(\cos \theta, \sin \theta, 2), \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP})=|2-\cos \theta|+|2-\sin \theta|+2=2-\cos \theta+2$

$-\sin \theta+2=6-\sqrt{2} \sin \left(\theta+\frac{\pi}{4}\right), \theta \in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

因为 $\frac{\pi}{4} \leqslant \theta+\frac{\pi}{4} \leqslant \frac{3 \pi}{4}$, 所以 $\sin \left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \in\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, 则 $D(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}) \in[6-\sqrt{2}, 5]$, 从而 $M-N=5-(6-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$.



15. 【解析】本题考查正三棱柱的几何性质与圆柱的侧面积, 考查数学运算的核心素养.

解: (1) 因为 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形,

所以其内切圆的半径 $r=\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 3 分

则剩余几何体的体积 $V=\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times 3-\pi \times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times 3=3 \sqrt{3}-\pi$ 6 分

(2) 正三棱柱的表面积 $S_1=3 \times 2 \times 3+2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2=18+2 \sqrt{3}$, 8 分

上、下底面内切圆的面积之和 $S_2=2 \pi \times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{2 \pi}{3}$, 9 分

被挖去的圆柱的侧面积 $S_3=2 \pi \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times 3=2 \sqrt{3} \pi$, 11 分

所以剩余几何体的表面积 $S=S_1+S_3-S_2=18+2 \sqrt{3}+2 \sqrt{3} \pi-\frac{2 \pi}{3}=18+2 \sqrt{3}+\frac{6 \sqrt{3}-2}{3} \pi$.

..... 13 分

16. 【解析】本题考查四点共面、三线共点、面面平行的证明, 考查逻辑推理的核心素养.

证明: (1) 连接 CE , 因为 GH 是 $\triangle BCE$ 的中位线, 所以 $GH \parallel CE, GH=\frac{1}{2} CE$ 1 分

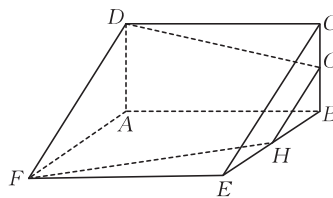
因为 $ABCD, ABEF$ 是两个全等的矩形,

所以 $CD \parallel AB, CD=AB, EF \parallel AB, EF=AB$,

所以 $EF \parallel CD, EF=CD$, 则四边形 $CDEF$ 为平行四边形, 从而 $DF \parallel CE$ 3 分

又因为 $GH \parallel CE$, 所以 $DF \parallel GH$, 故 D, G, H, F 四点共面. ...

..... 5 分



因为 $DG \subset \text{平面 } ABCD, HF \subset \text{平面 } ABEF$, 所以 $P \in \text{平面 } ABCD, P \in \text{平面 } ABEF$. ……

又因为 $ABCD \cap ABEF = AB$, 所以 $P \in AB$, 即直线 DG, AB, FH 经过同一点 P . ………

(3) 因为 $ABCD$ 是矩形, 所以 $BG \parallel AD$.

又 $BG \not\subset$ 平面 DAF , 所以 $BG \parallel$ 平面 DAF 12 分

同理可证 $BH \parallel$ 平面 DAF 14 分

因为 $BG \cap BH = B, BG, BH \subset \text{平面 } GBH$, 所以平面 $GBH \parallel \text{平面 } DAF$ 15 分

【1】第(1)问也可用如下方法解答:

所以 $\overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$, 即 $\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{DF}$ 共线. 3 分

又 GH, DF 是不重合的直线, 所以 $GH \parallel DF$, 则 D, G, H, F 四点共面. 5 分

【2】第(2)问也可用如下方法解答:

设 DG, AB 相交于点 P, FH, AB 相交于点 Q .

同理可证 $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB}$, 则 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BQ}$, 9 分

所以 P, Q 两点重合, 故直线 DG, AB, FH 经过同一点. 10 分

17. 【解析】本题考查平面与平面垂直、直线与平面所成角的正弦值、两平面之间的夹角的余弦值,考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

(1)证明:在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, E,F 分别为矩形 ACC_1A_1 的边 AC,A_1C_1 的中点, 则 $EF \parallel AC$, 2 分

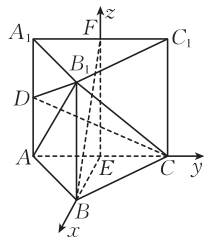
又 $AB=BC$, 所以 $BE \perp AC$ 3 分

因为 $BE \cap EF = E, BE, EF \subset \text{平面 } BEF$, 所以 $AC \perp \text{平面 } BEF$ 5 分

又 $AC \subset \text{平面 } ACB_1$, 所以平面 $ACB_1 \perp \text{平面 } BEF$ 6 分

(2)解:在直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 由(1)知, $EF \parallel AA_1$, 则 $EF \perp$ 平面 ABC , $BE \subset$ 平面 ABC , 有 $EF \perp BE$. 又 $AC \perp$ 平面 BEF , 所以 $\angle CBE$ 是 BC 与平面 BEF 所成的角, 即 $\sin \angle CBE = \frac{\sqrt{3}}{3}$

又 $BE \perp AC$, 所以设 $CE = 1$, 则 $BC = \sqrt{3}$, $BE = \sqrt{2}$, $EF = \frac{BE}{\tan \angle BFE} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

$$=\sqrt{2}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$


以 E 为原点, EB, EC, EF 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则

$$B(\sqrt{2}, 0, 0), C(0, 1, 0), B_1(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), D\left(0, -1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{DC} = \left(0, 2, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \overrightarrow{CB_1} = (\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}), \overrightarrow{CB} = (\sqrt{2}, -1, 0). \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{设平面 } DB_1C \text{ 的法向量为 } \mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DC} = 2y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}z_1 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CB_1} = \sqrt{2}x_1 - y_1 + \sqrt{2}z_1 = 0, \end{cases}$$

$$\text{取 } y_1 = \sqrt{2}, \text{ 得 } \mathbf{m} = (-3, \sqrt{2}, 4). \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{设平面 } BB_1C \text{ 的法向量为 } \mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB} = \sqrt{2}x_2 - y_2 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB_1} = \sqrt{2}x_2 - y_2 + \sqrt{2}z_2 = 0, \end{cases} \quad \text{取 } y_2 = \sqrt{2},$$

$$\text{得 } \mathbf{n} = (1, \sqrt{2}, 0). \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{(-3) \times 1 + \sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{2})^2 + 4^2} \times \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2}} = -\frac{1}{9},$$

$$\text{所以平面 } BB_1C \text{ 与平面 } DB_1C \text{ 夹角的余弦值是 } \frac{1}{9}. \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

18. 【解析】本题考查线面垂直的判定以及点到平面的距离, 考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

$$(1) \text{证明: 在直角梯形 } ABCD \text{ 中, } AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, CD = \sqrt{(4-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } AD = 4, \text{ 所以 } AC^2 + CD^2 = AD^2, \text{ 所以 } CD \perp AC. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } PA \perp \text{平面 } ABCD, \text{ 所以 } PA \perp CD. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } AC \cap PA = A, \text{ 所以 } CD \perp \text{平面 } PAC. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(2) \text{解: 假设存在一点 } E, \text{ 使点 } E \text{ 到平面 } PCD \text{ 的距离为 } \frac{\sqrt{3}}{6}, \text{ 设 } \frac{CE}{BC} = \lambda (0 \leq \lambda \leq 1), \text{ 即 } CE = 2\lambda, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

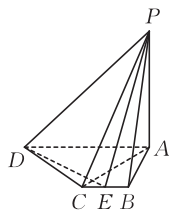
$$\text{连接 } DE, EP, \text{ 因为 } S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} \times 2\lambda \times 2 = 2\lambda,$$

$$\text{所以 } V_{P-CDE} = \frac{1}{3} \times 2\lambda \times 4 = \frac{8\lambda}{3}. \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } PA \perp \text{平面 } ABCD, \text{ 所以 } PA \perp AC, \text{ 则 } PC = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6},$$

$$\text{由 (1) 知 } CD \perp \text{平面 } PAC, \text{ 则 } CD \perp PC, S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 4\sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\text{由 } V_{E-PCD} = V_{P-CDE}, \text{ 得 } \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{8\lambda}{3}, \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{4}, \text{ 因此线段 } BC \text{ 上存在一点 } E, \text{ 当 } \frac{CE}{BC} = \frac{1}{4} \text{ 时, 点 } E \text{ 到平面 } PCD \text{ 的距离为 } \frac{\sqrt{3}}{6}. \quad \dots\dots\dots 17 \text{ 分}$$



【评分细则】

本题也可用如下方法解答:

以 A 为坐标原点, AD, AB, AP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系(图略), 则 $A(0, 0, 0), C(2, 2, 0), P(0, 0, 4), D(4, 0, 0)$ 2 分

(1) 设平面 PAC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{因为 } \overrightarrow{AP} = (0, 0, 4), \overrightarrow{AC} = (2, 2, 0), \text{ 所以 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AP} = 4z_1 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 2x_1 + 2y_1 = 0, \end{cases}$$

取 $y_1 = -1$, 得 $\mathbf{m} = (1, -1, 0)$ 5 分

又 $\overrightarrow{CD} = (2, -2, 0)$, 所以 $\overrightarrow{CD} = 2\mathbf{m}$, 即 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\mathbf{m}$ 共线, 6 分

所以 $CD \perp$ 平面 PAC 7 分

(2) 设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{因为 } \overrightarrow{PC} = (2, 2, -4), \overrightarrow{CD} = (2, -2, 0), \text{ 所以 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 2x_2 + 2y_2 - 4z_2 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 2x_2 - 2y_2 = 0, \end{cases}$$

取 $y_2 = 1$, 得 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ 10 分

设 $E(t, 2, 0), 0 \leq t \leq 2$, 点 E 到平面 PCD 的距离为 d ,

$$\text{因为 } \overrightarrow{CE} = (t-2, 0, 0), \text{ 所以 } d = \frac{|\overrightarrow{CE} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{2-t}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \text{ 解得 } t = \frac{3}{2}, \text{ 13 分}$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{CE}| = \frac{1}{2}, |\overrightarrow{BC}| = 2, \frac{CE}{BC} = \frac{1}{4}, \text{ 15 分}$$

因此线段 BC 上存在一点 E , 当 $\frac{CE}{BC} = \frac{1}{4}$ 时, 点 E 到平面 PCD 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 17 分

19. 【解析】本题考查立体几何中直线和平面的方程, 考查直观想象、逻辑推理及数学运算的核心素养.

(1) 解: 由直线 l_1 的点方向式方程为 $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{\sqrt{3}} = 1-z$, 可知直线 l_1 的一个方向向量为 $\mathbf{m}_1$

$$= (2, \sqrt{3}, -1), \text{ 1 分}$$

由平面 α_1 的一般式方程为 $x - \sqrt{3}y + 2z + 3 = 0$, 可知平面 α_1 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (1, -\sqrt{3}, 2)$, 2 分

$$\text{设直线 } l_1 \text{ 与平面 } \alpha_1 \text{ 所成的角为 } \theta, \text{ 则 } \sin \theta = |\cos \langle \mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1 \rangle| = \left| \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{n}_1}{|\mathbf{m}_1| |\mathbf{n}_1|} \right| = \left| \frac{2-3-2}{\sqrt{8} \times \sqrt{8}} \right| =$$

$$\frac{3}{8}, \text{ 即直线 } l_1 \text{ 与平面 } \alpha_1 \text{ 所成角的正弦值为 } \frac{3}{8}. \text{ 4 分}$$

(2) 证明: 由平面 α_2 的一般式方程为 $x - 2y + 3z - 1 = 0$, 可知平面 α_2 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (1, -2, 3)$, 由平面 β_1 的一般式方程为 $2x - y - 3z + 4 = 0$, 可知平面 β_1 的一个法向量为 $\mathbf{n}_3 = (2, -1, 3)$.

$$\text{设两平面的交线 } l_2 \text{ 的方向向量为 } \mathbf{m}_2 = (x_0, y_0, z_0), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = x_0 - 2y_0 + 3z_0 = 0, \\ \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = 2x_0 - y_0 - 3z_0 = 0, \end{cases}$$

令 $z_0=1$, 则 $x_0=3, y_0=3$, 可得 $\mathbf{m}_2=(3, 3, 1)$ 7 分

由平面 γ_1 的一般式方程为 $(m-2)x+(-2m+1)y+3(m+1)z-8=0$, 可知平面 γ_1 的一个法向量为 $\mathbf{n}_4=(m-2, -2m+1, 3m+3)$, 8 分

则 $\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n}_4=(m-2) \times 3+(-2m+1) \times 3+(3m+3) \times 1=0$, 即 $\mathbf{m}_2 \perp \mathbf{n}_4$.

又 $l_2 \not\subset \gamma_1$, 所以 $l_2 // \gamma_1$ 9 分

(3)解: 由平面 α_3 经过三点 $P(3, 0, 0), Q(2, 1, -2), H(-1, 4, 3)$, 可得 $\overrightarrow{HP}=(4, -4, -3), \overrightarrow{QP}=(1, -1, 2)$.

设侧面 ABB_1A_1 所在平面 α_3 的法向量为 $\mathbf{n}_5=(x_1, y_1, z_1)$, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{n}_5 = x_1 - y_1 + 2z_1 = 0, \\ \overrightarrow{HP} \cdot \mathbf{n}_5 = 4x_1 - 4y_1 - 3z_1 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } x_1=1, \text{ 解得 } y_1=1, z_1=0, \text{ 可得 } \mathbf{n}_5=(1, 1, 0). \quad \cdots 11 \text{ 分}$$

由平面 β_2 的一般式方程为 $2x-y+3z+4=0$, 可知平面 β_2 的一个法向量为 $\mathbf{n}_6=(2, -1, 3)$ 12 分

设平面 α_3 与平面 β_2 的交线 BB_1 的方向向量为 $\mathbf{m}_3=(x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m}_3 \cdot \mathbf{n}_5 = x_2 + y_2 = 0, \\ \mathbf{m}_3 \cdot \mathbf{n}_6 = 2x_2 - y_2 + 3z_2 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } x_2=1, \text{ 可得 } \mathbf{m}_3=(1, -1, -1). \quad \cdots 13 \text{ 分}$$

由平面 γ_2 的一般式方程为 $2x-3my+mz+6=0$, 可知平面 γ_2 的一个法向量为 $\mathbf{n}_7=(2, -3m, m)$, 14 分

由 $\mathbf{n}_7 \perp AA_1, AA_1 // BB_1$, 得 $\mathbf{m}_3 \perp \mathbf{n}_7, \mathbf{m}_3 \cdot \mathbf{n}_7=2+3m-m=0$, 解得 $m=-1$,

即 $\mathbf{n}_7=(2, 3, -1)$ 16 分

故平面 ABB_1A_1 与平面 ACC_1A_1 夹角的余弦值为 $|\cos \langle \mathbf{n}_5, \mathbf{n}_7 \rangle| = \left| \frac{\mathbf{n}_5 \cdot \mathbf{n}_7}{|\mathbf{n}_5| |\mathbf{n}_7|} \right| =$

$$\left| \frac{1 \times 2 + 1 \times 3}{\sqrt{2} \times \sqrt{14}} \right| = \frac{5\sqrt{7}}{14}. \quad \cdots 17 \text{ 分}$$

【评分细则】

【1】第(1)问中, 求出直线 l_1 的一个方向向量, 平面 α_1 的一个法向量各得 1 分, 求出直线 l_1 与平面 α_1 所成角的正弦值得 2 分.

【2】第(2)问中, 求出平面 α_2 的一个法向量、平面 β_1 的一个法向量各得 1 分.

【3】第(3)问中, 求出平面 β_2 的一个法向量、平面 γ_2 的一个法向量、平面 α_3 与平面 β_2 的交线的一个方向向量各得 1 分.

