

高三数学试卷参考答案

题序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	C	A	D	B	D	A	A	B	BC	ACD	BCD	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$2\sqrt{3}$	$(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

【评分细则】

【1】第 1~8 题, 凡与答案不符的均不得分.

【2】第 9 题, 全部选对的得 6 分, 有选错的不得分, 每选对一个得 3 分; 第 10, 11 题, 全部选对的得 6 分, 有选错的不得分, 每选对一个得 2 分.

【3】第 12, 13, 14 题, 凡与答案不符的均不得分.

1. C 【解析】本题考查中位数, 考查逻辑推理的核心素养.

样本数据 1, 3, 5, 4, 2 的中位数是 3.

2. A 【解析】本题考查集合, 考查数学运算的核心素养.

$A = \{0, 1, 2\}, A \cap B = \{1, 2\}.$

3. D 【解析】本题考查复数, 考查数学运算的核心素养.

$z = \frac{6-i}{1+i} = \frac{(6-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{5-7i}{2} = \frac{5}{2} - \frac{7}{2}i$, 其在复平面内对应的点为 $(\frac{5}{2}, -\frac{7}{2})$, 位于第四象限.

4. B 【解析】本题考查数列, 考查数学运算的核心素养.

记等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d . 因为 $S_6 = S_3$, 所以 $S_6 - S_3 = a_4 + a_5 + a_6 = 3a_5 = 0$, 即 $a_5 = 0$. 因

为 $a_1 = 1, a_5 = a_1 + 4d = 0$, 所以 $d = -\frac{1}{4}, a_2 = a_1 + d = \frac{3}{4}.$

5. D 【解析】本题考查三角恒等变换, 考查数学运算的核心素养.

因为 $\tan(\alpha + \beta) = -1, \tan(\alpha - \beta) = 1$, 所以 $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4} + k_1\pi (k_1 \in \mathbf{Z}), \alpha - \beta = \frac{\pi}{4} + k_2\pi (k_2 \in \mathbf{Z})$, 相减得 $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{k_1 - k_2}{2}\pi (k_1 - k_2 \in \mathbf{Z})$, 所以 $\tan \beta = \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{k_1 - k_2}{2}\pi) = 1$ 或 -1 .

6. A 【解析】本题考查函数的应用, 考查数学运算的核心素养.

由题意可得 $\begin{cases} 0.5 = a^{kt_1}, \\ 0.25 = a^{k(t_1+t_2)}, \end{cases}$ $0.25 = a^{kt_1+t_2} = a^{kt_1} a^{kt_2} = 0.5 a^{kt_2}$, 所以 $a^{kt_2} = 0.5 = a^{kt_1}$, 解得

$t_1 = t_2.$

7. A 【解析】本题考查平面向量, 考查直观想象、数学运算的核心素养.

解法一: 取 AB 的中点 M , 连接 DM (图略). 因为 $AD = BD$, 所以在 $\triangle ABD$ 中, $DM \perp AB$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 312.5$.

解法二: 在正五边形 $ABCDE$ 中, $\angle BAE = 108^\circ, \angle EAD = 36^\circ, \angle BAD = 72^\circ. |\overrightarrow{AD}| = 2|\overrightarrow{AE}|.$

$$\cos \angle EAD = 50 \cos 36^\circ, \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 25 \times 50 \cos 36^\circ \times \cos 72^\circ = \frac{1250 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{625 \sin 72^\circ \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{312.5 \sin 144^\circ}{\sin 36^\circ} = 312.5.$$

8. B 【解析】本题考查椭圆,考查数学运算的核心素养.

由题可知 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$. 由 $\vec{AF_2} = 3\vec{F_2B}$, 得 $|AF_2| = 3|F_2B|$, 由椭圆的定义可得 $|AF_1| + |AF_2| = 2a, |BF_1| + |F_2B| = 2a$, 设 $|AF_2| = d$, 则 $|AF_1| = 2a - d, |F_2B| = \frac{d}{3}, |BF_1| = 2a - \frac{d}{3}, |AB| = |AF_2| + |F_2B| = \frac{4}{3}d$.

因为 $|OF_1| = |OA|$, 即 $\triangle F_1AF_2$ 为直角三角形, $\angle F_1AF_2 = \frac{\pi}{2}$, 所以 $(2a - \frac{d}{3})^2 = (2a - d)^2 + (\frac{4}{3}d)^2$, 解得 $d = a$ 或 $d = 0$ (舍去), 又 $4c^2 = (2a - d)^2 + d^2$, 代入 $d = a$, 整理得 $c^2 = \frac{1}{2}a^2$,

所以离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. BC 【解析】本题考查三角函数,考查逻辑推理的核心素养.

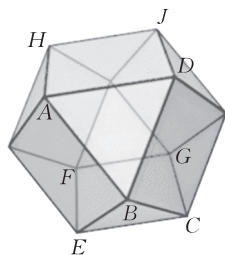
函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(-1, 0), (0, 1)$ 上单调递减. 函数 $y = \sin x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}), (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ 上单调递增, 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi), (\pi, \frac{3\pi}{2})$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}), (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ 上单调递增, 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi), (\pi, \frac{3\pi}{2})$ 上单调递减.

10. ACD 【解析】本题考查函数,考查逻辑推理的核心素养.

$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 1]$, A 正确. 因为函数 $y = \sqrt{1-x}$ 和 $y = -x^3$ 均为减函数, 所以 $f(x)$ 是减函数, 又因为 $f(1) = -1$, 所以 $f(x)$ 的值域为 $[-1, +\infty)$, B 错误. 因为 $f(0) = 1$, 所以 $\forall x \in (-\infty, 0), f(x) > 1$, C 正确. $f(x)$ 恰有 1 个零点, D 正确.

11. BCD 【解析】本题考查立体几何,考查直观想象、逻辑推理的核心素养.

记 AD, CE, AE, CD 的中点分别为 M, N, K, Q (图略). 平面 ABD 与平面 BCE 所成的角为 $\angle MBN$. $BM = BN = \sqrt{3}, MN = 2\sqrt{2}$, 显然 $\angle MBN \neq 90^\circ$, 所以平面 ABD 不与平面 BCE 垂直, A 错误. 平面 ABE 与平面 BCD 所成的角为 $\angle KBQ$. $BK = BQ = \sqrt{2}, KQ = 2$, 所以 $BK^2 + BQ^2 = KQ^2$, $\angle KBQ = 90^\circ$, 所以平面 $ABE \perp$ 平面 BCD , B 正确. 记 MN 的中点为 I (图略), 在 $\triangle MBN$ 中可得 $BI = 1$, 即四棱锥 $B-AECD$ 的高为 1. 该几何体可由四个与四棱锥 $B-AECD$ 全等的四棱锥和一个正四棱柱 $AHJD-EFGC$ 组成, 其体积为 $4 \times \frac{1}{3} \times 2 \times 2\sqrt{2} \times 1 + 2 \times 2 \times$



$2\sqrt{2} = \frac{40\sqrt{2}}{3}$, C 正确. 记正四棱柱 $AHJD-EFGC$ 的中心为 P (图略), 可得点 P 到该几何体各顶点的距离均为 2, 所以存在球 O , 使得该几何体的顶点都在球 O 的球面上, D 正确.

12. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】本题考查双曲线,考查数学运算的核心素养.

双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm x$, 圆 M 的圆心坐标为 $(1, 0)$. 点 $(1, 0)$ 到直线 $y = \pm x$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 由题意可得 $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. $2\sqrt{3}$ 【解析】本题考查解三角形,考查数学运算的核心素养.

因为 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 所以 $b^2 = a^2 + 4 - 2a$ ①. $\triangle ABC$ 的周长为 $a + b + c = 6 + 2\sqrt{3}$, 即 $a + b = 4 + 2\sqrt{3}$ ②. 由 ①②, 解得 $a = 4, b = 2\sqrt{3}$. 故 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ac \sin B = 2\sqrt{3}$.

14. $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ 【解析】本题考查函数与导数,考查逻辑推理、数学运算的核心素养.

$$f(x) = x^2 |x - a| = \begin{cases} x^2(x - a), & x \geq a, \\ -x^2(x - a), & x < a. \end{cases} \quad \text{当 } a \leq 0, x > 0 \text{ 时}, f'(x) = 3x^2 - 2ax > 0, f(x) \text{ 在}$$

$(0, +\infty)$ 上单调递增, 要使得 $\forall x \in [1, 2], f(x) \geq 2$, 则 $f(1) = |1 - a| \geq 2$, 结合 $a \leq 0$, 解得 $a \leq -1$. 若 $a > 0$, 当 $x \geq a$ 时, $f'(x) = x(3x - 2a) > 0$, 当 $x < a$ 时, $f'(x) = -x(3x - 2a)$, 所以当 $x \in (0, \frac{2a}{3})$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (\frac{2a}{3}, a)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{2a}{3})$ 上

$+\infty)$ 上单调递增, 在 $(\frac{2a}{3}, a)$ 上单调递减. 要使得 $\forall x \in [1, 2], f(x) \geq 2$, 则 $\begin{cases} a > 2, \\ f(1) \geq 2, \text{ 或} \\ f(2) \geq 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(1) \geq 2, \end{cases}$ 解得 $a \geq 3$. 综上, a 的取值范围是 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

15. 【解析】本题考查数列,考查数学运算的核心素养.

解: (1) 因为 $S_{2n} = 0, S_{2n-1} = 2$, 所以 $a_{2n} = S_{2n} - S_{2n-1} = -2$, 即 $\{a_n\}$ 的偶数项均为 -2

..... 2 分

因为 $S_{2n-2} = S_{2n} = 0 (n \geq 2)$, 所以 $a_{2n-1} = S_{2n-1} - S_{2n-2} = 2 (n \geq 2)$.

又因为 $a_1 = S_{2 \times 1 - 1} = 2$, 所以 $\{a_n\}$ 的奇数项均为 2 4 分

$a_n = 2 \times (-1)^{n-1}$ 6 分

(2) 记数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,

则 $T_n = 2 \times (-1)^0 + 2 \times 2 \times (-1)^1 + 2 \times 3 \times (-1)^2 + \cdots + 2n(-1)^{n-1}$, 8 分

$-T_n = 2 \times (-1)^1 + 2 \times 2 \times (-1)^2 + 2 \times 3 \times (-1)^3 + \cdots + 2n(-1)^n$, 10 分

两式相减得 $2T_n = 2 + 2 \times (-1)^1 + 2 \times (-1)^2 + \cdots + 2(-1)^{n-1} - 2n(-1)^n = 1 + (1 + 2n) \cdot (-1)^{n-1}$, 12 分

所以 $T_n = \frac{1}{2} + \frac{(1 + 2n)(-1)^{n-1}}{2}$ 13 分

【评分细则】

【1】第(1)问另解如下:

根据 $S_{2n}=0, S_{2n-1}=2$, 得到 $a_1=2, a_2=-2, \dots$ 2 分

据此得到 $\{a_n\}$ 为 $2, -2, 2, -2, \dots$ 4 分

$a_n=2 \times (-1)^{n-1}$. 6 分

【2】第(1)问的结果也可以写成 $a_n = \begin{cases} 2, n \text{ 为奇数}, \\ -2, n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

16. 【解析】本题考查概率、期望, 考查逻辑推理、数学运算的核心素养.

解: (1) 这 4 联可以凑成甲对联的概率为 $\frac{C_6^2}{C_8^4} = \frac{3}{14}$. 5 分

(2) X 的所有取值可能为 $0, 1, 2$.

$$P(X=0) = \frac{2^4}{C_8^4} = \frac{8}{35},$$

$$P(X=1) = \frac{4 \times C_3^2 \times 2^2}{C_8^4} = \frac{24}{35}, \dots 9 \text{ 分}$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2}{C_8^4} = \frac{3}{35}. \dots 13 \text{ 分}$$

X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{8}{35}$	$\frac{24}{35}$	$\frac{3}{35}$

$$E(X) = \frac{24}{35} + \frac{3}{35} \times 2 = \frac{6}{7}. \dots 15 \text{ 分}$$

【评分细则】

第(2)问中, 没有求 $P(X=0)$, 不扣分; 没有写出分布列表格, 不扣分.

17. 【解析】本题考查空间向量与立体几何, 考查直观想象、数学运算的核心素养.

(1) 证明: $\angle ADC = \angle APD = 90^\circ$, 即 $AD \perp CD, AP \perp PD$.

因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, 所以 $CD \perp$ 平面 PAD , 所以 $CD \perp AP$. 2 分

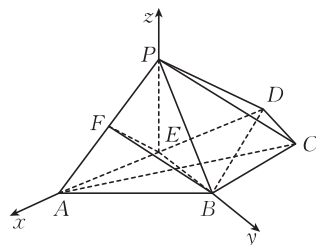
因为 $CD \cap PD = D$, 所以 $AP \perp$ 平面 PCD . 3 分

因为 $AP \subset$ 平面 PAB , 所以平面 $PAB \perp$ 平面 PCD . 4 分

(2) 证明: 取 AD 的中点 E , 连接 EF, BE, AC, BD . 5 分

在 $\triangle PAD$ 中, $EF \parallel PD$. 因为 $PD \subset$ 平面 $PCD, EF \not\subset$ 平面 PCD , 所以 $EF \parallel$ 平面 PCD . 6 分

在 $\triangle ACD$ 中, $AD = 2\sqrt{3}, CD = 2, \angle ADC = 90^\circ$,



所以 $\tan \angle DAC = \frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即 $\angle DAC = 30^\circ$,

易证 $\triangle ACD \cong \triangle ACB$, 所以 $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle BAD = 60^\circ$, $\triangle ABD$ 是等边三角形, 所以 $BE \perp AD$, 所以 $BE \parallel CD$.

因为 $CD \subset$ 平面 PCD , $BE \not\subset$ 平面 PCD , 所以 $BE \parallel$ 平面 PCD 8 分

因为 $EF \cap BE = E$, $EF \subset$ 平面 BEF , $BE \subset$ 平面 BEF , 所以平面 $BEF \parallel$ 平面 PCD .

因为 $BF \subset$ 平面 BEF , 所以 $BF \parallel$ 平面 PCD 10 分

(3) 解: 连接 PE . 以 E 为原点, EA, EB, EP 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $B(0, 3, 0), F(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}), P(0, 0, \sqrt{3}), C(-\sqrt{3}, 2, 0)$, 12 分

所以 $\overrightarrow{BF} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -3, \frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{PC} = (-\sqrt{3}, 2, -\sqrt{3})$ 13 分

因为 $\cos \langle \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{PC} \rangle = \frac{\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{BF}| |\overrightarrow{PC}|} = -\frac{3\sqrt{105}}{35}$, 14 分

所以直线 BF 与直线 PC 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{105}}{35}$ 15 分

【评分细则】

第(3)问另解如下:

记 $BE \cap AC = O$, 连接 OF (图略).

由(2)得平面 $BEF \parallel$ 平面 PCD . 因为平面 $PAC \cap$ 平面 $BEF = OF$, 平面 $PAC \cap$ 平面 $PCD = PC$, 所以 $OF \parallel PC$, 所以直线 BF 与直线 PC 所成的角即直线 BF 与直线 OF 所成的角, 而直线 BF 与直线 OF 所成的角为 $\angle OFB$, 所以直线 BF 与直线 PC 所成的角为 $\angle OFB$.

..... 12 分

因为 $\triangle ABD$ 是等边三角形, 所以 $AE = \sqrt{3}, BE = 3$.

在 $\triangle ADP$ 中, $PA = PD, \angle APD = 90^\circ$, 所以 $PE = AE = \sqrt{3}, EF = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

在 $\triangle ACD$ 中, OE 为中位线, $OE = \frac{1}{2}CD = 1$, 所以 $OB = BE - OE = 2$ 13 分

由(1)(2)得 $CD \perp$ 平面 PAD , $BE \parallel CD$, 所以 $BE \perp$ 平面 $PAD, BE \perp EF$,

则 $OF = \sqrt{EF^2 + OE^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}, BF = \sqrt{EF^2 + BE^2} = \frac{\sqrt{42}}{2}$ 14 分

$\cos \angle OFB = \frac{OF^2 + BF^2 - OB^2}{2OF \cdot BF} = \frac{3\sqrt{105}}{35}$,

所以直线 BF 与直线 PC 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{105}}{35}$ 15 分

18.【解析】本题考查抛物线,考查数学运算、直观想象的核心素养.

解:(1) $|AF| = \frac{p}{2} + 8 = 10$, 解得 $p = 4$ 3 分

(2) 由(1)可得抛物线 $C: y^2 = 8x, F(2, 0)$.

①由题意得 $A(8, 8)$. 若四边形 $FBAD$ 是以 FB, FD 为邻边的平行四边形, 则 $AB \parallel DF$, 所以直线 DF 的方程为 $x = 2$ 5 分

由 $\begin{cases} y^2 = 8x, \\ x = 2, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} y = \pm 4, \\ x = 2. \end{cases}$ 因为点 B, D 均在第一象限, 所以 $D(2, 4)$, 6 分

所以 $|DF| = 4 = |AB|$, 则 $B(8, 4)$.

点 A 到直线 DF 的距离为 6, 平行四边形 $FBAD$ 的面积为 $|DF| \times 6 = 24$.

故存在点 B, D , 使得四边形 $FBAD$ 是以 FB, FD 为邻边的平行四边形, 平行四边形 $FBAD$ 的面积为 24. 8 分

②设 $D(\frac{n^2}{8}, n), n > 0$.

若 $\frac{n^2}{8} = 2$, 则 $D(2, 4)$. 因为在矩形 $FBED$ 中, $FB \perp FD, \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FE}$, 所以 $B(8, 0), E(8, 4)$, 而 $E(8, 4)$ 不在 C 上, 不符合题意. 9 分

若 $\frac{n^2}{8} \neq 2$, 则直线 FD 的斜率 $k_{FD} = \frac{8n}{n^2 - 16}$ 10 分

因为在矩形 $FBED$ 中, $FB \perp FD$, 所以 $k_{FD} \cdot k_{FB} = -1$, 则 $k_{FB} = \frac{16 - n^2}{8n}$,

所以直线 FB 的方程为 $y = \frac{16 - n^2}{8n}(x - 2)$ 12 分

由点 B 的纵坐标 $y_B = \frac{16 - n^2}{8n}(8 - 2) = \frac{48 - 3n^2}{4n}$, 得 $B(8, \frac{48 - 3n^2}{4n})$, 13 分

所以 $\overrightarrow{FD} = (\frac{n^2}{8} - 2, n), \overrightarrow{FB} = (6, \frac{48 - 3n^2}{4n})$.

设 $E(x_E, y_E)$, 则 $\overrightarrow{FE} = (x_E - 2, y_E)$.

因为在矩形 $FBED$ 中, $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FE}$,

所以 $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FD} = (\frac{n^2}{8} + 4, \frac{48 + n^2}{4n}) = (x_E - 2, y_E)$, 则 $E(\frac{n^2}{8} + 6, \frac{48 + n^2}{4n})$, 15 分

将 $E(\frac{n^2}{8} + 6, \frac{48 + n^2}{4n})$ 的坐标代入 $y^2 = 8x$, 得 $(\frac{48 + n^2}{4n})^2 = 8(\frac{n^2}{8} + 6)$, 16 分

解得 $n^2 = \frac{16}{5}$. 因为 $n > 0$, 所以 $n = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, 即 $D(\frac{2}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5})$.

综上, 存在点 B, D, E , 使得四边形 $FBED$ 是以 FB, FD 为邻边的矩形, 此时 $D(\frac{2}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5})$.

..... 17 分

【评分细则】

【1】第(2)①问中,没有求出点 B 的坐标,不扣分.

【2】第(2)问中,写出结论“存在”,但没有过程,不给分.

【3】第(2)②问中,没有讨论直线 FD 的斜率不存在的情况,扣 1 分.

19.【解析】本题考查函数与导数,考查逻辑推理、数学运算的核心素养.

(1)解: $f'(x) = \frac{a}{x} + x - 1 = \frac{x^2 - x + a}{x}, x > 0$ 1 分

令 $x^2 - x + a = 0$, 由 $\Delta = 1 - 4a \leq 0$, 得 $a \geq \frac{1}{4}$,

此时 $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 2 分

当 $\Delta = 1 - 4a > 0$, 即 $a < \frac{1}{4}$ 时, 方程 $x^2 - x + a = 0$ 的两根为 $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}$ 3 分

当 $a \leq 0$ 时, $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2} \leq 0$, 所以当 $x \in (0, x_2)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}, +\infty)$ 上单调递增. 4 分

当 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时, $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2} > 0$, 所以当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (0, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2})$ 上单调递减, 在 $(0, \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2})$ 和 $(\frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}, +\infty)$ 上单调递增.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}, +\infty)$ 上单调递增;

当 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 在 $(\frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2})$ 上单调递减, 在 $(0, \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2})$ 和 $(\frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}, +\infty)$ 上单调递增; 当 $a \geq \frac{1}{4}$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 5 分

(2)解: $f(x) \geq k(x - 1) - \frac{1}{2}$, 即 $a \ln x + \frac{1}{2}x^2 - x - k(x - 1) + \frac{1}{2} \geq 0$.

令 $g(x) = a \ln x + \frac{1}{2}x^2 - x - k(x - 1) + \frac{1}{2}, g(1) = 0$ 6 分

$g'(x) = \frac{x^2 - (k + 1)x + a}{x}, g'(1) = a - k$ 7 分

若 $g'(1)=a-k>0$, 则存在 $x_0>0$, 使得当 $x\in(1-x_0, 1+x_0)$ 时, $g'(x)>0$, 即 $g(x)$ 在 $(1-x_0, 1+x_0)$ 上单调递增, 而 $g(1)=0$, 所以 $g(1-x_0)<0$, 不符合题意. 8 分

若 $g'(1)=a-k<0$, 则存在 $x'_0>0$, 使得当 $x\in(1-x'_0, 1+x'_0)$ 时, $g'(x)<0$, 即 $g(x)$ 在 $(1-x'_0, 1+x'_0)$ 上单调递减, 而 $g(1)=0$, 所以 $g(1+x'_0)<0$, 不符合题意. 9 分

若 $g'(1)=a-k=0$, 即 $a=k\leq 0$, 则 $g'(x)=\frac{x^2-(a+1)x+a}{x}=\frac{(x-1)(x-a)}{x}$.

当 $x\in(0, 1)$ 时, $g'(x)<0$, 当 $x\in(1, +\infty)$ 时, $g'(x)>0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

$g(x)\geq g(1)=0$, 符合题意.

综上, a 与 k 的数量关系为 $a=k$ 10 分

(3) 证明: 结合(1)可得, 当 $f(x)$ 有两个极值点时, $0<a<\frac{1}{4}$, 且 $x_1+x_2=1, x_1x_2=a, 0<x_1$

$<\frac{1}{2}$ 11 分

$f(x_1)-f(x_2)=a\ln x_1+\frac{1}{2}x_1^2-x_1-(a\ln x_2+\frac{1}{2}x_2^2-x_2)$ 12 分

$$=a\ln \frac{x_1}{x_2}+\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)-(x_1-x_2)=a\ln \frac{x_1^2}{a}+\frac{1}{2}(2x_1-1)-(2x_1-1)$$

$$=a\ln \frac{x_1^2}{a}-\frac{1}{2}(2x_1-1)=2a\ln x_1-a\ln a-\frac{1}{2}(2x_1-1). \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\text{令 } h(x)=2a\ln x-a\ln a-\frac{1}{2}(2x-1), 0<x<\frac{1}{2},$$

$$\text{则 } h'(x)=\frac{2a}{x}-1=\frac{2a-x}{x}. \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

当 $0<x<2a$ 时, $h'(x)>0$, 当 $2a<x<\frac{1}{2}$ 时, $h'(x)<0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, 2a)$ 上单调递增, 在 $(2a, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 15 分

$$\text{则 } h(x)_{\max}=h(2a)=2a\ln(2a)-a\ln a-\frac{1}{2}(4a-1)=a\ln(4a)-2a+\frac{1}{2}<\frac{1}{2},$$

所以 $f(x_1)-f(x_2)<\frac{1}{2}$ 17 分

【评分细则】

【1】第(1)问中, 若分类讨论的结果均正确, 没有写“综上, 当 $a\leq 0$ 时……”, 不扣分.

【2】第(2)问中, 只是设出 $g(x)$, 并求出 $g'(x)$, 没有求出 $g(1), g'(1)$, 只给 1 分.

