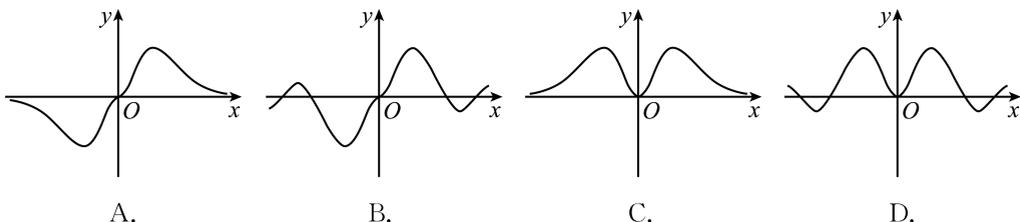


5. 函数 $f(x) = \frac{x+3x^3}{e^x + e^{-x}}$ 的图象大致为



6. 下列不等式成立的是

A. $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$

B. $1.7^{0.3} < 0.9^{3.1}$

C. $\log_3 7 > \log_5 7$

D. $\log_2 3 < \log_4 7$

7. 已知 α 是第三象限角, 则 $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$ 化简结果为

A. $-\frac{2}{\cos\alpha}$

B. $-\frac{2}{\tan\alpha}$

C. $-2\cos\alpha$

D. $-2\tan\alpha$

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的偶函数, 且 $f(1+x) + f(1-x) = 0$, 若 $-1 \leq x \leq 0$ 时, $f(x) = \log_2(3+2x)$, 则 $f\left(\frac{57}{2}\right) =$

A. -1

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知实数 a, b 满足 $0 < a < b$, 则下列不等式中一定成立的是

A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

B. $a^2 > b^2$

C. $\frac{a}{b} < \frac{a+2}{b+2}$

D. $\sqrt{a+1} > \sqrt{b+1}$

10. 已知关于 x 的不等式 $a(x-2)(x+1)+1 > 0$ 的解集是 (x_1, x_2) , 其中 $x_1 < x_2$, 则下列结论中正确的是

A. $x_1 + x_2 = 1$

B. $x_1 x_2 + 2 < 0$

C. $x_1 < -1 < x_2 < 2$

D. $|x_1 - x_2| > 3$

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x \geq 0, \\ 2^{-x} - 1, & x < 0, \end{cases}$ 实数 a, b, c 满足 $f(a) = f(b) = f(c) = \lambda$, 且 $a < b < c$, 则

A. $f[f(-3)] = -35$

B. $\lambda \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$

C. $a + b + c \in (1, 2)$

D. 函数 $y = f[f(x)] - \lambda$ 有 5 个互不相等的零点

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 函数 $f(x) = x + \frac{4}{x} (x > 0)$ 的最小值为_____.

13. 已知 $\tan \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\sin \alpha \cdot \cos \alpha =$ _____.

14. 根据调查统计,某地区未来新能源汽车保有量基本满足模型 $y = \frac{N}{1 + \left(\frac{N}{y_0} - 1\right)e^{-pt}}$, 其中 N 为

饱和度, y_0 为初始值, 此后第 x 年底新能源汽车的保有量为 y (单位: 万辆), p 为年增长率. 若该地区 2024 年底的新能源汽车保有量约为 20 万辆, 以此为初始值, 以后每年的增长率为 10%, 饱和度为 1020 万辆, 那么 2030 年底该地区新能源汽车的保有量约为_____万辆. (结果四舍五入保留到整数; 参考数据: $\ln 0.61 \approx -0.5$, $\ln 0.55 \approx -0.6$, $\ln 0.49 \approx -0.7$)

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 6 \geq 0\}$, $B = \{x | a - 5 < x < 2a + 1, a \geq 0\}$.

(1) 若 $a = 0$, 求 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B$;

(2) 若 $A \cup B = \mathbf{R}$, 求 a 的取值范围.

16. (15 分)

在直角坐标系内, 已知角 α 的顶点与原点重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边与单位圆交

于点 $P\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

(1) 求值: $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\tan \alpha}$;

(2) 先化简再求值: $\frac{\sin(2\pi - \alpha) \sin(\pi + \alpha) \sin(5\pi - \alpha) \cos\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi - \alpha) \sin(3\pi - \alpha) \sin(-\pi + \alpha) \sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)}$.

17. (15 分)

求下列各式的值:

(1) $2\sqrt{3} \times 3 \sqrt[3]{1.5} \times \sqrt[6]{12}$;

(2) $\log_5 25 - \log_2 (\log_2 16) + \log_2 5 \times \log_5 9 \times (\log_3 8 - \log_3 4)$.

18. (17 分)

已知函数 $f(x) = \frac{a-2^x}{2+2^{x+1}}$ (a 为实数) 是奇函数.

(1) 求 a 的值;

(2) 解不等式: $f(x) > -\frac{1}{4}$;

(3) 若实数 m 满足 $f(2m^2-3) + f(1-3m) > 0$, 求 m 的取值范围.

19. (17 分)

已知函数 $f(x) = ax + 1 - \ln \frac{2+x}{2-x}$, 其中 $a < 0$.

(1) 证明: 函数 $f(x)$ 的图象是中心对称图形;

(2) 设 $-2 < x < 0$, 证明: $f(x) > 1$;

(3) 令 $g(x) = 2^x + 2^{-x} + 2a$, 若 $\forall x_1 \in [-1, 1], \exists x_2 \in [-1, 1]$, 使得 $f(x_1) \leq g(x_2)$, 求 a 的取值范围.