乐山市高中 2023 级第一次调查研究考试

数 学

(本试卷满分 150 分，考试用时 120 分钟)

注意事项:

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $U=\{x|x$ 是小于 9 的正整数$\}$,$A=\{1,2,3\}$,$B=\{3,4,5,6\}$,则 $\complement_U(A\cup B)=$

A. $\{7,8\}$　　B. $\{0,7,8\}$　　C. $\{1,2,3,4,5,6\}$　　D. $\{1,2,4,5,6,7,8\}$

2. 已知复数 z 满足 $(1+2i)\bar{z}=4+3i$,则 $|z|=$

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 5

3. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$,使 $a>b$ 成立的一个充分不必要条件是

A. $a+c>b+c$　　B. $a^2>b^2$　　C. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　D. $\lg a>\lg b$

4. 已知两条平行直线 $l_1:2x-y-1=0$,$l_2:6x-3y-2=0$,则 l_1 与 l_2 间的距离为

A. $\frac{\sqrt{5}}{45}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{15}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

5. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数,当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=x^2+4x$,若 $f(a)>5$,则 a 的取值范围是

A. $(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $(-1,1)$　　D. $(-5,5)$

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于原点对称. 若 $\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{3}{5}$，则 $\sin 2\beta$ 的值为

A. $\frac{24}{25}$　　B. $-\frac{24}{25}$　　C. $\frac{7}{25}$　　D. $-\frac{7}{25}$

7. 已知点 $P(-2,-3)$，圆 $Q:(x-4)^2+(y-2)^2=9$，以 PQ 为直径的圆与圆 Q 相交于 A,B 两点，则直线 PA 与圆 Q 的位置关系为

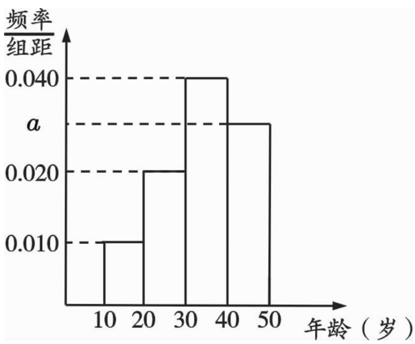
A. 相交　　B. 相离　　C. 相切　　D. 不确定

8. 已知函数 $f(x)=x\ln x-ax+b$ 的最小值为 0，则

A. $a>b$　　B. $a\geqslant b$　　C. $a<b$　　D. $a\leqslant b$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 2025 年 9 月 20 日，四川省城市足球联赛（简称“川超”）开幕式暨揭幕战观众达 21448 人. 为了解各年龄层对“川超”的关注程度，随机选取了 200 名年龄在 $[10,50]$ 的观众进行调查，并绘制如下的频率分布直方图，则



A. $a=0.03$

B. 该场观众年龄众数的估计值为 40

C. 该场观众年龄 50% 分位数的估计值为 35

D. 该场观众年龄平均数的估计值为 35

10. 已知函数 $f(x)=2^x+x$，$g(x)=\log_2 x+x$ 的零点分别为 a,b，则下列说法正确的是

A. $a-b<0$　　B. $f(\log_2 x)=g(x)$

C. $f(a)<f(2a)$　　D. $a+b=0$

11. 已知曲线 $\Gamma:\frac{y|y|}{4}-x|x|=1$，$A(0,2)$，$B(0,-2)$，$C(-\frac{3}{2},1)$，$D(-\frac{1}{2},3)$，$P(x,y)$ 为曲线 Γ 上不同于 A 的任意一点，则

A. $y=2x$ 是曲线 Γ 的一条渐近线　　B. 直线 PA 与直线 PB 斜率之积为 $\frac{1}{4}$

C. y 是关于 x 的单调递增函数　　D. $\triangle PCD$ 面积的取值范围是 $[2-\sqrt{2},2)$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,2)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,1)$，则 $|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=$________.

13. 一个圆锥的底面直径为 4，高为 $2\sqrt{3}$，过圆锥高的中点作平行于底面的截面，该截面截去了一个圆锥，则剩下几何体的表面积为________.

14. 作斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 M，N 两点（M 点在 N 点的左侧），点 $A(4,4)$ 在直线 l 的右上方，当 $\angle MAN=60°$ 时，则直线 AM 的斜率为________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤。

15. （13 分）

已知向量 $\boldsymbol{a}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\boldsymbol{b}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[0,\pi]$.

（1）若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 θ 的值；

（2）记 $f(\theta)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，求函数 $y=f(\theta)$ 的最小值和最大值及对应的 θ 的值.

16. （15 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax+b$ 在点 $(0,b)$ 处的切线方程是 $4x+y-4=0$.

（1）求 a，b 的值；

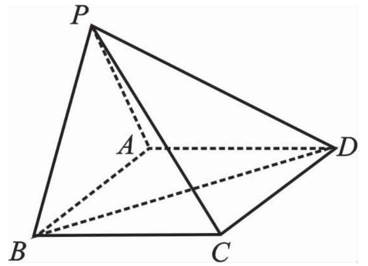
（2）若 $f(x)$ 在区间 $(m,m+1)$ 有唯一极值点，求 m 的取值范围.

17. （15 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PA=PB$，$AB=\sqrt{2}$，$BC=1$.

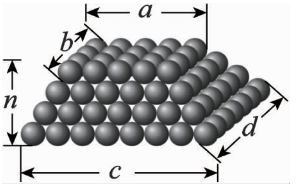
（1）证明：$PC\perp BD$；

（2）若三棱锥 $P-ABD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$，求平面 PAB 与平面 PCD 的夹角的余弦值.



18.(17 分)

北宋数学家沈括博学多才、善于观察. 据说有一天,他走进一家酒馆,看见一层层垒起的酒坛,不禁想到:"怎么求这些酒坛的总数呢?"经过反复尝试,沈括提出对于上底有 ab 个,下底有 cd 个,共 n 层的堆积物(如图),可以用公式 $T_n=\frac{n}{6}[(2b+d)a+(b+2d)c]+\frac{n}{6}(c-a)$ 求出物体的总数,这就是所谓的"隙积术",相当于求数列 ab, $(a+1)(b+1)$, $(a+2)(b+2)$, $\cdots$, $(a+n-1)(b+n-1)=cd$ 的和.



(1)若 $a=1,b=1$.

①求 T_6 的值;

②求 T_n.

(2)已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3n^2-3n+1$, 其前 n 项和记为 S_n. 数列$\{b_n\}$满足 $b_1=3$,且 $b_{n+1}=b_n+2\times 3^n(n\geqslant 1)$. 将$\{S_n\}$与$\{b_n\}$的所有公共项按照它们在原数列中的顺序组成一个新的数列$\{c_n\}$. 设 $E_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{c_k}-1}$,证明:$E_n<1$.

19.(17 分)

有 $2n$ 个人围坐在一个圆桌边上,每人都越过桌面与另外一人握手,若要求所有人握手时手臂互不交叉,例如 $n=2$ 时(如图),一共有 4 个人,以 1、2、3、4 表示,握手两人用一条线连结,共有 2 种方式. 记 $n=k$ 时,a_{2k}表示满足条件的握手方法总数.

(1)求 a_6,a_8;

(2)已知 $n=5$,把人顺时针标记为 1,2,$\cdots$,10,在 1 和 2 握手的情况下,求 9 和 10 握手的概率;

(3)已知:对任意 $m(m\in\mathbf{N}^*)$个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_m$,有 $E(\sum_{i=1}^{m}X_i)=\sum_{i=1}^{m}E(X_i)$. 当 $n=k$ 时,随机变量 Y_{2k}表示相邻两人握手的对数,其期望记为 E_{2n}. 求 $E_2\cdot E_4\cdots E_{2n}$(用 n 和 a_{2n}表示).