高一数学试题参考答案

1. C　由题意可得 $A=\{0,1,2,3\}$，则 $A\cap B=\{0,1,3\}$.

2. B　存在量词命题的否定是全称量词命题.

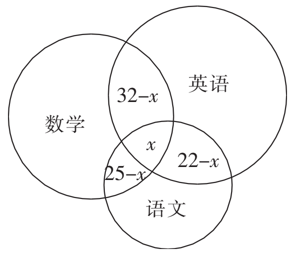
3. D　由题意可得 $f(-1)=(-1)^2+2=3$，则 $f(f(-1))=f(3)=3-1=2$.

4. A　由 $x-2=\sqrt{x^2-4x+4}$，得 $x-2=|x-2|$，则 $x\geqslant 2$，故"$x=2$"是"$x-2=\sqrt{x^2-4x+4}$"的充分不必要条件.

5. A　因为 $f(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}$，所以 $f(-x)=-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}=-f(x)$，所以 $f(x)$是奇函数，则 $f(x)$的图象关于原点对称，排除 C，D. 当 $0<x<\frac{1}{2}$时，$f(x)<0$，排除 B.

6. C　由题意可得 $a^2-4a\leqslant 0$，解得 $0\leqslant a\leqslant 4$.

7. B　如图，设该班学生中同时参加了数学小组、英语小组和语文小组的人数为 x，只参加其中一个小组的人数为 y，则$(32-x)+(25-x)+(22-x)+x+y=56$，即 $y=2x-23$. 因为 $x\leqslant 22$，所以 $y\leqslant 21$.



8. D　由题意可得 $f(\frac{9}{2})=2f(\frac{5}{2})=4f(\frac{1}{2})=4\times(4+1-3)=8$.

9. BCD　因为 $y=\sqrt{x^2}=|x|$，所以 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$不是同一函数. 因为 $y=2\sqrt[3]{x^3}=2x$，所以$y=2x$与 $y=2\sqrt[3]{x^3}$是同一函数. $y=x^2+x+3$ 与 $y=t^2+t+3$ 是同一函数. 因为 $y=\sqrt{x^4}=x^2$，所以 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x^4}$是同一函数.

10. AC　因为 $a>b$，$c^2+1>0$，所以 $a(c^2+1)>b(c^2+1)$，所以 $ac^2+a>bc^2+b$，所以 $ac^2-b>bc^2-a$，则 A 一定成立. 当 $a=1$，$b=-2$ 时，$\frac{1}{a}=1$，$\frac{1}{b}=-\frac{1}{2}$，则$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故 B 不一定成立. 因为 $a>b$，所以 $a^3>b^3$，则 C 一定成立. 当 $a=-1$，$b=-2$ 时，$a^2=1$，$ab=2$，则 $a^2<ab$，故 D 不一定成立.

11. ACD　由题意可得 $A_1\cap A_2=\{x|x=4n+1,n\in\mathbf{Z}\}$. 因为 $2025=4\times 506+1$，所以 $2025\in A_1\cap A_2$，则 A 正确. 当 $a=5$，$b=11$ 时，$ab=55=6\times 9+1\in A_3$，则 B 错误. 由 $a\in A_2$，$b\in A_3$，可设 $a=4n_1+1$，$b=6n_2+1(n_1,n_2\in\mathbf{Z})$，则 $ab=24n_1n_2+4n_1+6n_2+1=2(12n_1n_2+2n_1+3n_2)+1$，$3a+2b=12n_1+3+12n_2+2=4(3n_1+3n_2+1)+1$. 因为 $n_1,n_2\in\mathbf{Z}$，所以 $12n_1n_2+2n_1+3n_2\in\mathbf{Z}$，$3n_1+3n_2+1\in\mathbf{Z}$，所以 $ab\in A_1$，$3a+2b\in A_2$，则 C，D 正确.

12. AC　令 $x^2-(a+3)x+3a=0$，解得 $x=3$ 或 $x=a$. 当 $a>3$ 时，不等式 $x^2-(a+3)x+3a<0$ 的解集为$(3,a)$，则 $7<a\leqslant 8$；当 $a=3$ 时，不等式 $x^2-(a+3)x+3a<0$ 无解，所以 $a=3$ 不符合题意；当 $a<3$ 时，不等式 $x^2-(a+3)x+3a<0$ 的解集为$(a,3)$，则 $-2\leqslant a<-1$. 综上，a 的取值范围是$[-2,-1)\cup(7,8]$.

13. $(\frac{3}{2},2)\cup(2,+\infty)$　由题意可得$\begin{cases}2x-3>0,\\x-2\neq 0,\end{cases}$解得$\frac{3}{2}<x<2$ 或 $x>2$.

14. $\frac{1}{4}x^2-2x+\frac{11}{4}$　令 $t=2x+1$,则 $x=\frac{t-1}{2}$,从而 $f(t)=(\frac{t-1}{2})^2-3\times\frac{t-1}{2}+1=\frac{1}{4}t^2-2t+\frac{11}{4}$,即 $f(x)=\frac{1}{4}x^2-2x+\frac{11}{4}$.

15. 44 或 55　设此次参加秋游的人数为 x,由题意可知此次秋游的总费用 $y=\begin{cases}180x, 0<x\leqslant 25,\\ 150x, 25<x\leqslant 45,\\ 120x, x>45.\end{cases}$ 当 $0<x\leqslant 25$ 时,$y\leqslant 4500$,不符合题意;当 $25<x\leqslant 45$ 时,令 $150x=6600$,解得 $x=44$,符合题意;当 $x>45$ 时,令 $120x=6600$,解得 $x=55$,符合题意.综上,此次参加秋游的人数是 44 或 55.

16. 3　$\frac{2}{ab}+\frac{3b}{2a}=\frac{(a+b)^2}{2ab}+\frac{3b}{2a}=\frac{a^2+2ab+b^2}{2ab}+\frac{3b}{2a}=\frac{a}{2b}+\frac{2b}{a}+1\geqslant 3$,当且仅当 $a=2b=\frac{4}{3}$时,等号成立.

17. 解:由题意可得 $A=\{x|x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3\}$. ………………………… 2 分

(1)当 $a=1$ 时,$B=\{x|0<x<4\}$, ………………………… 3 分

则 $A\cap B=\{x|3\leqslant x<4\}$. ………………………… 5 分

(2)因为 $A\cup B=A$,所以 $B\subseteq A$, ………………………… 6 分

则 $a-1\geqslant 3$ 或 $a+3\leqslant -1$, ………………………… 8 分

解得 $a\geqslant 4$ 或 $a\leqslant -4$,即 a 的取值范围是$(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$. ………………………… 10 分

18. (1)证明:设 $x_1>x_2>1$,则 $f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1-1}+\sqrt{x_1+2}-(\sqrt{x_2-1}+\sqrt{x_2+2})$

$=(\sqrt{x_1-1}-\sqrt{x_2-1})+(\sqrt{x_1+2}-\sqrt{x_2+2})$. ………………………… 2 分

因为 $x_1>x_2$,所以 $x_1-1>x_2-1>0$,$x_1+2>x_2+2>3$,

所以$\sqrt{x_1-1}>\sqrt{x_2-1}$,$\sqrt{x_1+2}>\sqrt{x_2+2}$,

即$\sqrt{x_1-1}-\sqrt{x_2-1}>0$,$\sqrt{x_1+2}-\sqrt{x_2+2}>0$,

则 $f(x_1)-f(x_2)>0$,$f(x_1)>f(x_2)$. ………………………… 5 分

故 $f(x)$是$(1,+\infty)$上的增函数. ………………………… 6 分

(2)解:由(1)易证 $f(x)$在其定义域内是单调递增的. ………………………… 7 分

当 $a\geqslant -2$ 时,$f(x)_{\min}=f(a)=\sqrt{a+2}=2$,即 $a=2$,满足条件; ………………………… 9 分

当 $a<-2$ 时,$f(x)_{\min}=f(-2)=\sqrt{-2-a}=2$,即 $a=-6$,满足条件. ………………………… 11 分

综上,$a=-6$ 或 $a=2$. ………………………… 12 分

19. 证明:(1)因为 $a+b=1$,所以 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1-2ab$. ………………………… 2 分

因为 $a>0$,$b>0$,所以 $ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2=\frac{1}{4}$,当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$时,等号成立. ………………………… 4 分

所以 $1-2ab\geqslant 1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$,即 $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$, ………………………… 5 分

故 $2a^2+2b^2\geqslant 1$. ………………………… 6 分

(2)因为 $a+b=1$,所以$\frac{1}{a}+\frac{9}{b}=(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{9}{b})=\frac{b}{a}+\frac{9a}{b}+10$. ………………………… 8 分

因为 $a>0,b>0$,所以$\frac{b}{a}>0,\frac{9a}{b}>0$, ………………………………………………………… 9 分

所以$\frac{b}{a}+\frac{9a}{b}\geqslant 6$,当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{9a}{b}$,即 $b=3a=\frac{3}{4}$时,等号成立, ……………………… 11 分

则$\frac{b}{a}+\frac{9a}{b}+10\geqslant 16$,即$\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\geqslant 16$. ………………………………………………………………… 12 分

20. 解:(1)当 $x<0$ 时,$-x>0$,

则 $f(-x)=(-x)^2-2\times(-x)-3=x^2+2x-3$. …………………………………………… 2 分

因为 $f(x)$是奇函数,所以 $f(x)=-f(-x)=-x^2-2x+3$. ………………………………… 3 分

因为 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(0)=0$, ……………………………………………… 4 分

则 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x-3,x>0,\\0,x=0,\\-x^2-2x+3,x<0.\end{cases}$ ……………………………………………………………… 5 分

(2)当 $x>0$ 时,$f(x)=x^2-2x-3$,

由二次函数的性质可得 $f(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增. ………… 6 分

因为 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递增,在$(-1,0)$上单调递减. ……………………………………………………………………………………………… 7 分

因为 $f(x)$在$(2a-1,a+2)$上单调递增,所以$\begin{cases}2a-1\geqslant 1,\\2a-1<a+2\end{cases}$或$\begin{cases}a+2\leqslant -1,\\2a-1<a+2,\end{cases}$ ………… 9 分

解得 $1\leqslant a<3$ 或 $a\leqslant -3$. …………………………………………………………………… 11 分

故 a 的取值范围是$(-\infty,-3]\cup[1,3)$. ……………………………………………………… 12 分

21. (1)解:“$x>y>a$”是“x 比 y 更远离 a”的充分不必要条件. ……………………………… 1 分

理由如下:

由 $x>y>a$,得 $x-a>y-a>0$,则$|x-a|>|y-a|$,

故“$x>y>a$”是“x 比 y 更远离 a”的充分条件. ……………………………………………… 3 分

由 x 比 y 更远离 a,可得$|x-a|>|y-a|$.

当 $x=-3,y=-2,a=0$ 时,满足$|x-a|>|y-a|$,但不满足 $x>y>a$,

则“$x>y>a$”不是“x 比 y 更远离 a”的必要条件. ……………………………………… 5 分

综上,“$x>y>a$”是“x 比 y 更远离 a”的充分不必要条件. ………………………………… 6 分

(2)证明:因为 $m>0,n>0$,所以$\frac{1}{m^2}>0,\frac{1}{n^2}>0$,所以$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\geqslant\frac{2}{mn}$,当且仅当 $m=n$ 时,等号成立. ………………………………………………………………………………………………… 7 分

因为 $m>0,n>0$,所以 $2mn>0,\frac{2}{mn}>0$,所以$\frac{2}{mn}+2mn\geqslant 4$,当且仅当 $mn=1$ 时,等号成立.

……………………………………………………………………………………………………… 8 分

因为 $b=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+2mn$,所以 $b\geqslant 4$,当且仅当 $m=n=1$ 时,等号成立, ……………… 9 分

所以 $b>2\sqrt{3}>2$. …………………………………………………………………………………… 10 分

由(1)可知 b 比 $2\sqrt{3}$ 更远离 2. ······································ 12 分

22. 解:(1)由题意可知等腰三角形 AB 边上的高为 $\sqrt{y^2-x^2}$, ······························ 1 分

则该零件部件的面积为 $6x\sqrt{y^2-x^2}+6\sqrt{3}x^2=12$,变形可得 $y^2=\dfrac{4}{x^2}+4x^2-4\sqrt{3}$,

所以 $y=2\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+x^2-\sqrt{3}}$. ······································ 3 分

因为 $y<2x$,所以 $y^2<4x^2$,即 $y^2=\dfrac{4}{x^2}+4x^2-4\sqrt{3}<4x^2$,解得 $x^2>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ·········· 4 分

当六边形的顶点在圆周上时,x 取得最大,此时 $12x^2=12$,即 $x^2=1$. ·················· 5 分

故 y 关于 x 的关系式为 $y=\sqrt{\dfrac{4}{x^2}+4x^2-4\sqrt{3}}$,$\dfrac{\sqrt{3}}{3}<x^2\leqslant 1$. ······················ 6 分

(2)该零件部件的周长 $l=12y=12\sqrt{\dfrac{4}{x^2}+4x^2-4\sqrt{3}}\geqslant 12\sqrt{2\sqrt{\dfrac{4}{x^2}\cdot 4x^2}-4\sqrt{3}}=12(\sqrt{6}-\sqrt{2})$,当且仅当 $\dfrac{4}{x^2}=4x^2$,即 $x=1$ 时,等号成立. ································ 8 分

此时 $y^2=8-4\sqrt{3}$,该圆形铁片的半径为 $\sqrt{y^2-x^2}+\sqrt{3}x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{3}=2$, ·· 10 分

则该圆形铁片的面积为 $2^2\pi=4\pi$. ··· 11 分

故当 $x=1$ 时,该部件的周长取最小值,此时该圆形铁片的面积为 $4\pi\ \mathrm{cm}^2$. ·········· 12 分