机密★启用前〔考试时间：2025年7月2日下午15:00－17:00〕

乐山市普通高中2026届高二下学期教学质量检测

数　学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知变量x与y，a与b分别都成线性相关关系，且x与y相关系数r_1满足$-0.75<r_1<-0.65$，且a与b相关系数r_2满足$0.75<r_2<0.95$，下列结论正确的是

A. x与y负相关，a与b负相关，且x与y的相关性更强

B. x与y负相关，a与b正相关，且x与y的相关性更强

C. x与y负相关，a与b正相关，且x与y的相关性更弱

D. x与y正相关，a与b负相关，且x与y的相关性更弱

【答案】C

【解析】由题可知$r_1<0$，$r_2>0$且$|r_1|<|r_2|$，∴x与y成负相关关系，a与b成正相关关系，且x与y的相关性更弱.

【命题立意】原创题，考查相关系数的概念.

2. 已知函数$f(x)=x^2-1$，则当自变量x由2变到2.1时，函数的平均变化率为

A. 4　　B. 4.1　　C. 4.2　　D. 4.3

【答案】B

【解析】函数的平均变化率为$\dfrac{f(2.1)-f(2)}{2.1-2}=\dfrac{2.1^2-1-(2^2-1)}{2.1-2}=2.1+2=4.1$.

【命题立意】改编自《选择性必修第二册》P66练习第4题，考查平均变化率的概念.

3. 某课题组为调查“错题重练”是否有助于学生提高数学成绩，随机抽取300名高中生分为两组，实验组在每天的学习中有计划地开展“错题重练”，对照组学习方法不变．一个月后，对统计数据运用2×2列联表进行独立性检验，计算得$\chi^2=7.815$，则下列结论正确的是

α	0.1	0.01	0.001
χ^2	2.706	6.635	10.828

A. 认为“错题重练”与提高数学成绩有关

B. 认为“错题重练”与提高数学成绩无关

C. 认为“错题重练”与提高数学成绩有关，此推断犯错误的概率不大于0.01

D. 认为“错题重练”与提高数学成绩有关，此推断犯错误的概率不大于0.001

【答案】C

【解析】∵$7.815>6.635$，∴根据小概率值$\alpha=0.01$的独立性检验，可以推断“错题重练”与有助于提高数学成绩有关.

【命题立意】改编自《选择性必修第三册》P133 例 4，考查独立性检验.

4. 已知等差数列 $\{a_n\}$，$a_1+a_3+a_5=18$，$a_2+a_4+a_6=24$，则 $a_{2025}=$

A. 4038　　B. 4040　　C. 4050　　D. 4052

【答案】C

【解析】解法一：设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，首项为 a_1，根据题意得：

$\begin{cases}a_1+a_1+2d+a_1+4d=18\\a_1+d+a_1+3d+a_1+5d=24\end{cases}$，$\therefore \begin{cases}a_1=2\\d=2\end{cases}$，$\therefore a_{2025}=a_1+2024d=4050$.

解法二：$a_2+a_4+a_6=24$ 减去 $a_1+a_3+a_5=18$，得 $3d=6$，即 $d=2$，

$\therefore$ 将 $d=2$ 带入 $a_1+a_3+a_5=18$ 得 $a_1=2$，$\therefore a_{2025}=a_1+2024d=4050$.

【命题立意】改编自《选择性必修第二册》P25 第 2 题，考查等差数列的通项公式.

5. 1000 的不同正因数个数为

A. 16　　B. 12　　C. 10　　D. 8

【答案】A

【解析】$1000=2^3\times5^3$，则不同正因数个数为 $(3+1)\times(3+1)=16$.

【命题立意】改编自《选择性必修第三册》P12 第 12 题，考查分步乘法计数原理.

6. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_2=8$，$S_4=80$，则 $S_6=$

A. -216　　B. 216　　C. -728　　D. 728

【答案】D

【解析】解法一：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，首项为 a_1，

若 $q=1$，则 $S_4=4a_1=2\times2a_1=2S_2$，与题意不符，所以 $q\neq1$；

由 $S_2=8$，$S_4=80$ 可得，$\dfrac{a_1(1-q^2)}{1-q}=8$①，$\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=80$②，

由①②可得，$q^2=9$，所以 $S_6=\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^2)}{1-q}\cdot(1+q^2+q^4)=728$.

故选：D.

解法二：因为 S_2，S_4-S_2，S_6-S_4 成等比数列，即 $72^2=8(S_6-80)$ 解得：$S_6=728$.

故选：D.

【命题立意】改编自 2023 年新课标全国 II 卷第 8 题，考查等比数列前 n 项和公式.

7. 若随机变量 X 服从二项分布 $X\sim B(6,p)$ 且 $P(X=3)=\dfrac{5}{16}$，则 $E(2X+3)=$

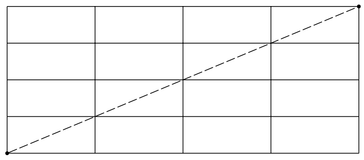
A. 3　　B. 6　　C. 9　　D. 12

【答案】C

【解析】$P(X=3)=C_6^3p^3(1-p)^3=\dfrac{5}{16}$，解得 $p=\dfrac{1}{2}$，又 $X\sim B(6,p)$，$E(X)=6\times\dfrac{1}{2}=3$，所以 $E(2X+3)=2E(X)+3=9$.

【命题立意】原创题，考查二项分布及其期望的性质.

8. 以走网格为例，从格点 $(0,0)$ 走到格点 (n,n)，只能向右或向上走，且在对角线的右下方（不能越过对角线）的路径的条数，就是卡特兰数，记为 H_n. 则 $H_4=$



A. C_8^4　　B. $\frac{1}{2}C_8^4$　　C. $\frac{1}{5}C_8^4$　　D. $\frac{1}{7}C_8^4$

【答案】C

【解析】$C_8^4-C_8^3=\frac{1}{5}C_8^4$

【命题立意】原创题，考查组合数.

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 已知等比数列$\{a_n\}$，$a_1=2$，$q=3$，则

A. 数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等比数列

B. 数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$和是$3-\frac{1}{3^{n-1}}$

C. 数列$\{\log_2 a_n\}$是等差数列

D. 数列$\{\log_2 a_n\}$的前10项和是$45\log_2 3$

【答案】AC

【解析】由题可得$a_n=2\times 3^{n-1}$，$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^{n-1}}$，所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等比数列，故$A$正确；

$S_n=\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$，故$B$不正确；

$\log_2 a_n=\log_2 2\times 3^{n-1}=(n-1)\log_2 3+1$，$\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n=n\log_2 3+1-[(n-1)\log_2 3+1]=\log_2 3$ $=d$，故$\{\log_2 a_n\}$是等差数列，$T_{10}=10\times 1+\frac{10\times 9}{2}\log_2 3=10+45\log_2 3$，故$C$，$D$正确.

故选AC.

【命题立意】考查等差数列和等比数列的概念、通项公式、前n项和公式.

10. 已知多项式$(x-2)(x+1)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则下列说法正确的是

A. $a_0=-2$

B. $a_2=-8$

C. $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-16$

D. $a_1+a_3+a_5=-8$

【答案】ABD

【解析】令$x=0$，即$a_0=-2$，故A正确；$a_2=C_4^1-2\cdot C_4^2=-8$，故$B$正确；令$x=1$，即$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-16$，所以$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-14$，故$C$错误；令$x=-1$，即$a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=0$，联立可得$a_1+a_3+a_5=-8$．故选$ABD$.

【命题立意】改编自《选择性必修第三册》P38第5题（1）

11. 已知函数$f(x)=(e^{x+b}-1)(x-a+1)$，则下列说法正确的是

A. 当$a=1$，$b=0$时，函数$f(x)$仅有一个零点

B. 当$a=1$时，若$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，则$b\geqslant -1-ln2$

C. 若$f(x)\geqslant 0$恒成立，则$a^2+b^2\geqslant 1$

D. $\forall a$，$b\in R$，$f(x)$都存在极值点

【答案】ABD

【解析】对于A，当$a=1$，$b=0$时，函数$f(x)=(e^x-1)x$，由$f(x)=0$，$x=0$或$e^x-1=0$，得x

$=0$，正确；

对于 B．当 $a=1$ 时，$f(x)=(e^{x+b}-1)x$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $f'(x)=(x+1)e^{x+b}-1\geqslant 0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，$\therefore -b\leqslant x+ln(x+1)$，$\because y=x+ln(x+1)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore -b\leqslant 1+ln2$，即 $b\geqslant -1-\ln 2$，正确；

对于 C．由 $(e^{x+b}-1)(x-a+1)\geqslant 0$ 知，$y=e^{x+b}-1$ 与 $y=x-a+1$ 同号，令 $e^{x+b}-1=0$，解得 $x=-b$，令 $x-a+1=0$，解得 $x=a-1$，$\because y=e^{x+b}-1$ 和 $y=x-a+1$ 单调递增，$\therefore -b=a-1$，即 $a+b=1$，由 $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant(\frac{a+b}{2})^2$ 得 $\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\frac{1}{4}$，即 $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$，$\therefore a^2+b^2\geqslant 1$ 错误；

对于 D．$f'(x)=e^{x+b}(x-a+2)-1$，$\therefore$ 当 $x\to-\infty$时，$f'(x)\to-1$，当 $x\to+\infty$时，$f'(x)\to+\infty$，$\therefore f'(x)$ 在 R 上一定有变号零点，$\therefore f(x)$ 一定存在极值点．正确．

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 用 0，1，2，3，4 可以组成没有重复数字的三位数______个．

【答案】48

【解析】解法一：$A_4^1\times A_4^2=48$

解法二：$A_5^3-A_4^2=48$

【命题立意】改编自《选择性必修第三册》P19 例 4，考查排列．

13. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，设 T_n 为数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和，若 $S_6=12$，$S_{12}=168$，则 $T_n=$______．

【答案】n^2-9n

【解析】根据等差数列性质，数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，设其公差为 d．因为 $\frac{S_6}{6}=\frac{12}{6}=2$，$\frac{S_{12}}{12}=\frac{168}{12}=14$，$\therefore d=\frac{\frac{S_{12}}{12}-\frac{S_6}{6}}{12-6}=\frac{14-2}{6}=2$，又 $\because \frac{S_6}{6}=\frac{S_1}{1}+5d$，$\therefore \frac{S_1}{1}=-8$，$\therefore T_n=(-8)n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2=n^2-9n$．

【命题立意】原创题，考查等差数列前 n 项和公式、数列的函数性质

14. 甲、乙、丙三名篮球运动员轮流进行篮球“一对一”单挑比赛，每场比赛有两人参加，分出胜负，规则如下：每场比赛中的胜方继续参加下一场比赛，负方下场换该场未参加比赛的运动员上场参加下一场比赛，以此类推.甲运动员实力较强，每场与乙、丙比赛胜率均为 $\frac{3}{4}$，且各场比赛的结果均相互独立.由抽签法决定哪两名运动员参加第一场比赛，记甲参加第 n 场比赛的概率为 $P_n(n\in N^*)$，则 $P_n=$______．

【答案】$P_n=\frac{4}{5}-\frac{2}{15}(-\frac{1}{4})^{n-1}$

【解析】$p_1=\frac{2}{3}$，由题意可得 $p_n=\frac{3}{4}p_{n-1}+(1-p_{n-1})$，则 $p_n=-\frac{1}{4}p_{n-1}+1$，

即 $p_n-\frac{4}{5}=-\frac{1}{4}(p_{n-1}-\frac{4}{5})$，$\therefore \{p_n-\frac{4}{5}\}$ 为等比数列，首项为 $p_1-\frac{4}{5}=-\frac{2}{15}$，公比为 $q=-\frac{1}{4}$．

$\therefore p_n-\frac{4}{5}=-\frac{2}{15}\cdot(-\frac{1}{4})^{n-1}$，解得 $p_n=\frac{4}{5}-\frac{2}{15}\cdot(-\frac{1}{4})^{n-1}$．

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

已知正项等比数列 $\{a_n\}$，$a_4=4a_2$，且 $2a_4$，$\frac{a_3^2}{2}$，a_5 构成等差数列．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n=\dfrac{1}{(2\log_2 a_n-1)\cdot(2\log_2 a_{n+1}-1)}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

【答案】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

由 $a_4=4a_2$，得 $q^2=4$，解得 $q=2$ 或 $q=-2$(舍). ……2 分

因为 $2a_4$，$\dfrac{a_3^2}{2}$，a_5 成等差数列，所以 $(a_1q^2)^2=2a_1q^3+a_1q^4$. ……4 分

解得 $a_1=2$. ……5 分

所以 $a_n=2\times 2^{n-1}=2^n(n\in N^*)$ ……7 分

(2) 由 (1) 知，$b_n=\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$. ……9 分

则 $T_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\right]$. ……11 分

所以 $T_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$. ……13 分

【命题立意】考查等比数列的通项公式、等差数列的概念、裂项求和法

16. (15 分)

某种产品每吨成本 6 万元，其销售价格 x(万元 / 吨) 和销售量 y(吨) 的变化情况如下表：

x	7	7.5	8	8.5	9
y	10	9	8.5	7.5	5

(1) 若 y 与 x 线性相关，求 y 关于 x 的经验回归方程；

(2) 根据 (1) 的结论，预测要使该产品销售利润最大，销售价格是多少？(结果精确到 0.1)

附：(参考公式 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$)

【答案】(1) 依题意，$\bar{x}=\dfrac{7+7.5+8+8.5+9}{5}=8$. ……1 分

$\bar{y}=\dfrac{10+9+8.5+7.5+5}{5}=8$. ……2 分

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=(7-8)^2+(7.5-8)^2+(8-8)^2+(8.5-8)^2+(9-8)^2=2.5$. ……3 分

$\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=(-1)\times 2+(-0.5)\times 1+0\times 0.5+0.5\times(-0.5)+1\times(-3)=-5.75$. ……4 分

因此 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{-5.75}{2.5}=-2.3$. ……6 分

$\hat{a}=8-(-2.3)\times 8=26.4$. ……8 分

所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=-2.3x+26.4$. ……10 分

(2) 销售利润为 $f(x)=(-2.3x+26.4)(x-6)=-2.3x^2+40.2x-158.4$. ……13 分

当 $x=\dfrac{40.2}{4.6}\approx 8.7$ 时，$f(x)$ 取得最大值，

所以预测销售价格是 8.7 万元 / 吨时，该产品销售利润最大. ……15 分

17. (15 分)

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-(a+2)x+2a\ln x$.

（1）当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值；

（2）讨论函数 $f(x)$ 在 $(0,3)$ 上的单调性.

【答案】（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+2\ln x(x>0)$

$\therefore f'(x)=x-3+\frac{2}{x}=\frac{(x-1)(x-2)}{x}$. ………1 分

令 $f'(x)>0$, 即 $\frac{(x-1)(x-2)}{x}>0$, 则 $0<x<1$ 或 $x>2$.

令 $f'(x)<0$, 即 $\frac{(x-1)(x-2)}{x}<0$, 则 $1<x<2$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1),(2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减. ………3 分

$\therefore f(x)$ 的极大值为 $f(1)=-\frac{5}{2}$, 极小值为 $f(2)=2\ln 2-4$. ………5 分

（2）由题 $f'(x)=x-(a+2)+\frac{2a}{x}=\frac{(x-2)(x-a)}{x}(0<x<3)$. ………6 分

①当 $a\leqslant 0$ 时，$x-a>0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,3)$ 上单调递增. ………8 分

②当 $0<a<2$ 时，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,a),(2,3)$ 上单调递增，在 $(a,2)$ 上单调递减. ………10 分

③当 $a=2$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 在 $(0,3)$ 上恒成立，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,3)$ 上单调递增. ………11 分

④当 $2<a<3$ 时，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,2),(a,3)$ 上单调递增，在 $(2,a)$ 上单调递减. ………13 分

⑤当 $a\geqslant 3$ 时，$x-a<0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,3)$ 上单调递减. ………15 分

综上所述：

当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,3)$ 上单调递增

当 $0<a<2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a),(2,3)$ 上单调递增，在 $(a,2)$ 上单调递减

当 $a=2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,3)$ 上单调递增

当 $2<a<3$ 时，$f(x)$ 在 $(0,2),(a,3)$ 上单调递增，在 $(2,a)$ 上单调递减

当 $a\geqslant 3$ 时，$f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,3)$ 上单调递减.

18. (17 分)

某地市场监管部门对当地一食品厂生产的水果罐头开展固形物含量抽样检验，按照国家标准规定，在一瓶水果罐头中，固形物含量不低于 55% 为优级品，固形物含量低于 55% 且不低于 50% 为一级品，固形物含量低于 50% 为二级品或不合格品.

（1）现有 5 瓶水果罐头，已知其中 3 瓶为优级品，2 瓶为一级品.

（i）若每次从中随机取出 1 瓶，取出的罐头不放回，求在第 1 次抽到优级品的条件下，第 2 次抽到一级品的概率；

（ii）对这 5 瓶罐头依次进行检验，每次检验后不放回，直到区分出 5 瓶罐头的等级时终止检验，记检验次数为 X，求随机变量 X 的分布列与期望；

（2）已知该食品厂生产的水果罐头优级品率为 $p(0<p<1)$，且各件产品是否为优级品相互独立，若在 5 次独立重复抽检中，至少有 3 次抽到优级品的概率不小于 $4\times(\frac{2}{3})^4$，求 p 的最小值.

【答案】(1) (ⅰ)$P=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. ……3分

(2) X的所有可能取值为：2,3,4. ……4分

$P(X=2)=\frac{A_2^2}{A_5^2}=\frac{1}{10}$. ……5分

$P(X=3)=\frac{A_3^3+C_3^1C_2^1A_2^2}{A_5^3}=\frac{3}{10}$. ……6分

$P(X=4)=\frac{C_3^2C_2^1A_3^3+C_3^2C_2^1A_3^3}{A_5^4}=\frac{3}{5}$. ……7分

X的分布列为：

X	2	3	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

……8分

$\therefore E(X)=2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{3}{5}=\frac{7}{2}$. ……10分

(2) 记在5次独立重复抽检中，至少有3次抽到优级品的概率为$f(p)$, 其中$0<p<1$

则$f(p)=C_5^3p^3(1-p)^2+C_5^4p^4(1-p)+p^5=6p^5-15p^4+10p^3$. ……12分

$f'(p)=30p^4-60p^3+30p^2=30p^2(p^2-2p+1)=30p^2(p-1)^2>0$

$\therefore f(p)$在$(0,1)$单调递增. ……14分

又$f(\frac{2}{3})=4\times(\frac{2}{3})^4$，则$p\geqslant\frac{2}{3}$. ……16分

$\therefore p$的最小值为$\frac{2}{3}$. ……17分

19. (17分)

已知函数$f(x)=\frac{x^a}{e^x}+x-a\ln x-1(a\in R)$.

(1) 当$a=1$时，求函数$f(x)$在$x=1$处的切线方程;

(2) 若函数$f(x)$有两个零点，记作x_1，x_2.

(i) 求参数a的取值范围;

(ii) 若$0<3x_1\leqslant x_2$，证明：$x_1\cdot x_2^3\geqslant 243$.

【答案】(1) 当$a=1$时，$f(x)=\frac{x}{e^x}+x-\ln x-1$,

则$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}+1-\frac{1}{x}$. ……1分

$\therefore f'(1)=0$. ……2分

又$\because f(1)=\frac{1}{e}$

$\therefore f(x)$在$x=1$处的切线方程为$y=\frac{1}{e}$. ……3分

(2) (i) 由题知，$f(x)=\frac{x^a}{e^x}+x-a\ln x-1=0$在$(0,+\infty)$上有两个根$x_1$，$x_2$

$\therefore \frac{e^{\ln x^a}}{e^x}+x-a\ln x-1=0$，即$e^{a\ln x-x}-(a\ln x-x)-1=0$. ……4分

令$g(t)=e^t-t-1$，则$g'(t)=e^t-1$.

当$t\in(-\infty,0)$时，$g'(t)<0$，$g(t)$单调递减，

当$t\in(0,+\infty)$时，$g'(t)>0$，$g(t)$单调递增，

$\therefore g(t)_{min}=g(0)=0$

问题转化为$a\ln x-x=0$在$(0,+\infty)$上有两个根. ……5分

易知$a\neq 0$，故$\frac{1}{a}=\frac{\ln x}{x}$

令$h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

$\therefore$当$x\in(0,\mathrm{e})$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增

当$x\in(\mathrm{e},+\infty)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减. ……6分

又$\because h(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$，且$x\to+\infty$时，$h(x)\to 0$；$x\to 0^-$时，$h(x)\to-\infty$ ……7分

$\therefore 0<\frac{1}{a}<\frac{1}{\mathrm{e}}$，解得$a>\mathrm{e}$，即参数$a$的取值范围为$(\mathrm{e},+\infty)$. ……8分

(ii) 由（i）知，$\begin{cases}a\ln x_1=x_1\\ a\ln x_2=x_2\end{cases}$，两式相减得$a\ln\frac{x_2}{x_1}=x_2-x_1$

$\therefore\frac{1}{a}=\frac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}$. ……9分

要证$x_1\cdot x_2^3\geqslant 243$

即证$\ln x_1+3\ln x_2\geqslant\ln 243=5\ln 3$. ……10分

即证$\frac{x_1}{a}+\frac{3x_2}{a}=\frac{1}{a}(x_1+3x_2)=\frac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}(x_1+3x_2)\geqslant 5\ln 3$

即证$\frac{\frac{3x_2}{x_1}+1}{\frac{x_2}{x_1}-1}\ln\frac{x_2}{x_1}\geqslant 5\ln 3$. ……11分

令$t=\frac{x_2}{x_1}\in[3,+\infty)$，

即证$\frac{3t+1}{t-1}\ln t\geqslant 5\ln 3$在$[3,+\infty)$上恒成立. ……12分

令$u(t)=\frac{3t+1}{t-1}\ln t(t\geqslant 3)$

$$\therefore u'(t)=\frac{\left(\frac{3t+1}{t}+3\ln t\right)(t-1)-(3t+1)\ln t}{(t-1)^2}$$

$$=\frac{\frac{3t^2-2t-1}{t}-4\ln t}{(t-1)^2}.$$ ……13分

令$v(t)=\frac{3t^2-2t-1}{t}-4\ln t(t\geqslant 3)$

$\therefore v'(t)=3+\frac{1}{t^2}-\frac{4}{t}=\frac{(t-1)(3t-1)}{t^2}>0$

$\therefore v(t)$在$[3,+\infty)$上单调递增. ……14分

$\therefore v(t)\geqslant v(3)=\frac{20}{3}-4\ln 3>0$. ……15分

$\therefore u'(t)>0$，则$u(t)$在$[3,+\infty)$上单调递增. ……16分

$\therefore u(t)\geqslant u(3)=\frac{3\times 3+1}{3-1}\ln 3=5\ln 3$

$\therefore\frac{3t+1}{t-1}\ln t\geqslant 5\ln 3$(得证)

$\therefore x_1\cdot x_2^3\geqslant 243$. ……17分