高一数学试题参考答案

1. D 【解析】本题考查平面向量的减法，考查直观想象的核心素养.
$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

2. C 【解析】本题考查复数的运算，考查数学运算的核心素养.
因为 $a,b\in\mathbf{R}$，$(2a+b)-3a\mathrm{i}=3\mathrm{i}$，所以 $2a+b=0$，$-3a=3$，解得 $a=-1$，$b=2$.

3. C 【解析】本题考查函数的性质，考查数形结合的数学思想.
根据函数的图象易知 $f(x)=\cos x$ 为偶函数且在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上为减函数，故选 C.

4. C 【解析】本题考查三点共线，考查数学运算的核心素养.
由题可知 $\overrightarrow{AB}=(m,2)$，$\overrightarrow{AC}=(4,6)$，因为 A,B,C 三点共线，所以 $8=6m$，即 $m=\frac{4}{3}$.

5. D 【解析】本题考查解三角形，考查化归与转化的数学思想.
由余弦定理得 $a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=b+\frac{2}{3}c$，整理得 $b^2+c^2-a^2=-\frac{4}{3}bc$，所以 $\cos A=-\frac{2}{3}<0$，即 A 为钝角，所以 $\triangle ABC$ 是钝角三角形.

6. A 【解析】本题考查函数的性质，考查逻辑推理的核心素养.
由题意知，$0<a=\cos 1<\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b=\sin 1>\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$c=\tan 1>\tan\frac{\pi}{4}=1$，故 $a<b<c$.

7. B 【解析】本题考查解三角形的实际应用，考查直观想象的核心素养.
由题意得，在 $\triangle ABS$ 中，$\angle BAS=\theta$，$AB=10\sqrt{39}$，$\angle BSA=3\theta-\theta=2\theta$.
由正弦定理有 $\frac{AB}{\sin\angle BSA}=\frac{BS}{\sin\angle BAS}$，代入数据得 $\frac{10\sqrt{39}}{\sin 2\theta}=\frac{BS}{\sin\theta}$，解得 $BS=\frac{5\sqrt{39}}{\cos\theta}$.
因为 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以 $\cos\theta=\frac{\sqrt{13}}{4}$，$BS=20\sqrt{3}$（海里）.

8. A 【解析】本题考查复数的应用，考查直观想象的核心素养.
由题可知 $(2+\mathrm{i})^2+(2+\mathrm{i})p+q=0(p,q\in\mathbf{R})$，则 $(3+2p+q)+(4+p)\mathrm{i}=0$，所以 $3+2p+q=0$，$4+p=0$，解得 $p=-4$，$q=5$，由 $|z-z_1|=p+q$，可得 $|z-z_1|=1$，所以 M 围成的图形是半径为 1 的圆，其面积为 π.

9. AD 【解析】本题考查复数的运算，考查数学运算的核心素养.
由于 $|z_1|=\sqrt{5}$，$|z_2|=\sqrt{5}$，故 A 正确；z_1 的共轭复数为 $2-\mathrm{i}$，故 B 错误；$z_1z_2=(2+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})=4-3\mathrm{i}$，复数 z_1z_2 对应的点位于第四象限，故 C 错误；$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\frac{(2+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=\frac{2+\mathrm{i}+4\mathrm{i}-2}{5}=\mathrm{i}$ 为纯虚数，故 D 正确.

10. BD 【解析】本题考查平面向量的运算，考查直观想象的核心素养.
因为 $\overrightarrow{BC}=5\overrightarrow{CD}$，所以 $\overrightarrow{BD}=6\overrightarrow{CD}$，故 A 错误；由向量加法的三角形法则，可得 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{6}{5}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{6}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{6}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$，故 B 正确；$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\frac{2\pi}{3}=-1$，故 C 错误；$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=(\frac{6}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB})\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{39}{10}$，故 D 正确.

11. ABC　**【解析】本题考查解三角形，考查化归与转化的数学思想.**

由正弦定理得$\frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{x}{\sin B}$，则 $x=2\sqrt{2}\sin B$，又 $B\in(0,\frac{3\pi}{4})$，且满足条件的三角形只有一个，即 x 有唯一的角与其对应，所以 $B\in\{\frac{\pi}{2}\}\cup(0,\frac{\pi}{4}]$，故 $x=2\sqrt{2}\sin B\in\{2\sqrt{2}\}\cup(0,2]$.

故选 ABC.

12. ABD　**【解析】本题考查函数图象及其性质，考查化归与转化的数学思想.**

因为 $f(\frac{\pi}{2}-x)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}{2+\sin(\pi-2x)}=\frac{\cos x+\sin x}{2+\sin 2x}=f(x)$，所以 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，A 正确；因为 $f(-\frac{\pi}{2}-x)=\frac{\sin(-\frac{\pi}{2}-x)+\cos(-\frac{\pi}{2}-x)}{2+\sin(-\pi-2x)}=\frac{-\sin x-\cos x}{2+\sin 2x}=-f(x)$，所以 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{4},0)$ 对称，B 正确；$f(-x)=\frac{\sin(-x)+\cos(-x)}{2+\sin(-2x)}=\frac{-\sin x+\cos x}{2-\sin 2x}\neq f(x)$，所以 C 错误；令 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，则当 $t=0$ 时，$y=0$，当 $t\in[-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2}]$ 时，$y=\frac{t}{t^2+1}=\frac{1}{t+\frac{1}{t}}$，当 $t=1$ 时，$f(x)$ 取得最大值$\frac{1}{2}$，D 正确.

13. 6π；-3　**【解析】本题考查三角函数的图象，考查直观想象的核心素养.**

$f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$，最小值为 -3.

14. $-\frac{\pi}{6}$　**【解析】本题考查正切函数，考查数学运算的核心素养.**

因为 $f(x)=\tan(3x+\varphi)(|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{4})$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{9},0)$ 对称，所以 $-\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，因为 $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{4}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

15. -1　**【解析】本题考查平面向量的基本定理，考查逻辑推理的核心素养.**

因为 A 关于点 O 的对称点为 C，所以$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$.
又 B 关于点 C 的对称点为 D，所以$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.
又$\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OC}+y\overrightarrow{OD}$，所以$\overrightarrow{OM}=(-x-2y)\overrightarrow{OA}+(-y)\overrightarrow{OB}$.
因为 A,B,M 三点共线，所以 $-x-2y-y=1$，即 $x+3y=-1$.

16. 120 **【解析】本题考查三角形的面积，考查逻辑推理的核心素养.**

设 $BP=x,BQ=y$，因为 $S_{\triangle PBM}+S_{\triangle QBM}=S_{\triangle BPQ}$，所以 $\frac{1}{2}\cdot 5x\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot y\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{2}xy$，

即 $4x+3y=xy$，所以 $xy=4x+3y\geqslant 2\sqrt{12xy}$，可得 $xy\geqslant 48$，所以三角形 BPQ 面积的最小值为 24 m^2，又因为正方形 $ABCD$ 的面积为 144 m^2，所以五边形 $APQCD$ 面积的最大值为 120 m^2.

17. 解：(1)若 z 为实数，则 $m^2+m=0$，所以 $m=0$ 或 $m=-1$. ………………………………… 3 分

(2)若 z 为纯虚数，则 $\begin{cases}-m^2+m+2=0,\\ m^2+m\neq 0,\end{cases}$ 所以 $m=2$. ………………………………… 6 分

(3)若复数 z 在复平面内所对应的点位于第四象限，则 $\begin{cases}-m^2+m+2>0,\\ m^2+m<0,\end{cases}$ 解得

$\begin{cases}-1<m<2,\\ -1<m<0,\end{cases}$ 得 $-1<m<0$，所以 m 的取值范围为 $(-1,0)$. ………………………… 10 分

18. 解：(1)设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$，因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，所以 $x+2y=0$. ………………………………… 2 分

又 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-y=3$，………………………………………………………………… 4 分

解得 $x=6,y=-3$，所以 $\boldsymbol{c}=(6,-3)$. ………………………………………………… 6 分

(2)$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=(-5,5)$，………………………………………………………………… 8 分

所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=-5$，………………………………………………………… 10 分

则向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的模为 $\left|\frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right|=5$. ………………………… 12 分

19. 解：(1)由题可知 $|OA|=\sqrt{3}$，则 $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan\theta=-\sqrt{2}$. ……………… 2 分

$\frac{-\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta)+\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\sin(2\pi-\theta)-2\sqrt{2}\cos(-\theta)}=\frac{-\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta}{-\sin\theta-2\sqrt{2}\cos\theta}$ ………………………………… 4 分

$=\frac{-\tan\theta+\sqrt{2}}{-\tan\theta-2\sqrt{2}}=-2$. ………………………………………………………… 6 分

(2)由题可知 $\alpha+\theta=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，………………………………………………… 8 分

由(1)可知 $\sin 2\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos 2\alpha=-\frac{1}{3}$，…………………………………………… 10 分

所以 $\cos(\theta-\alpha-\frac{\pi}{3})=\cos(\pi-2\alpha+2k\pi-\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{2\pi}{3}-2\alpha)=-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha=$

$\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$. ………………………………………………………………………………… 12 分

20. (1)证明：因为 $\sin\angle CAF=2\sin\angle ACF$，所以 $CF=2AF$. ……………………………… 2 分

又因为 $\triangle AFC\cong\triangle BDA\cong\triangle CEB$，所以 $AF=CE$，………………………………… 3 分

所以 $CF=2CE$，即 E 为 CF 的中点，所以 F 为 AD 的中点. …………………………… 4 分

(2)解:设$|\overrightarrow{AC}|=1$,$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD})+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, ······················ 6 分

所以$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BE})+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,则$\overrightarrow{BE}=\frac{2}{7}\overrightarrow{BA}+\frac{4}{7}\overrightarrow{BC}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}-\frac{6}{7}\overrightarrow{AB}$, ··············· 7 分

所以$|\overrightarrow{BE}|=\sqrt{(\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}-\frac{6}{7}\overrightarrow{AB})^2}=\sqrt{\frac{16}{49}\overrightarrow{AC}^2-\frac{48}{49}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{36}{49}\overrightarrow{AB}^2}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$. ·········· 8 分

又$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AC}=(\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}-\frac{6}{7}\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}^2-\frac{6}{7}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{7}$, ·························· 10 分

所以向量$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BE}$夹角的余弦值为$\frac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BE}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{\sqrt{7}}{14}$. ································ 12 分

21. 解:(1)在$\triangle ABC$中,$\cos\angle ACB=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{16+9-4}{2\times4\times3}=\frac{7}{8}$. ······················ 2 分

因为$BC\perp CD$,所以$\sin\angle ACD=\cos\angle ACB=\frac{7}{8}$, ·· 3 分

所以$\triangle ACD$的面积$S=\frac{1}{2}AC\cdot CD\cdot\sin\angle ACD=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{15}\times\frac{7}{8}=\frac{7\sqrt{15}}{4}$. ········· 5 分

(2)设$\angle BCA=\theta$,$0<\theta<\frac{\pi}{3}$,则$\angle ACD=\frac{\pi}{2}-\theta$,$\angle BAC=\frac{\pi}{3}-\theta$.

在$\triangle ABC$中,$\frac{BC}{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}=\frac{AC}{\sin\frac{2\pi}{3}}$,则$BC=\frac{8}{\sqrt{3}}\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)$, ································ 7 分

在$\triangle ACD$中,$\frac{AD}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}=\frac{AC}{\sin\frac{\pi}{6}}$,则$AD=8\cos\theta$, ·· 9 分

所以$(\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2})AD-BC=(\frac{4\sqrt{3}}{3}+4)\cos\theta-\frac{8}{\sqrt{3}}\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)=\frac{4\sqrt{3}}{3}\cos\theta+\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\theta=\frac{4\sqrt{6}}{3}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$, ·· 11 分

当$\theta=\frac{\pi}{4}$时,$(\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2})AD-BC$取得最大值$\frac{4\sqrt{6}}{3}$. ································· 12 分

22. 解:(1)因为$f(0)=2\sin\varphi=1$,可得$\sin\varphi=\frac{1}{2}$,

因为$f(x)$在$x=0$处附近单调递增,所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$, ··· 2 分

所以$f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$,因为$f(\pi)=2\sin(\pi\omega+\frac{\pi}{6})=-1$,所以$\sin(\pi\omega+\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$, ··· ··· 3 分

因为$f(x)$在$x=\pi$处附近单调递减,且当$x>0$时,$f(x)$在$x=\pi$处的第一次取值为$-\frac{1}{2}$,所以$\omega\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$,可得$\omega=1$. ·· 4 分

即 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$. ·· 5 分

(2)将 $f(x)$ 图象的横坐标变为原来的 3 倍,纵坐标不变,可得到 $y=2\sin(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6})$ 的图象,

·· 6 分

再把 $y=2\sin(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 π 个单位长度,可得 $g(x)=2\sin[\frac{1}{3}(x+\pi)+\frac{\pi}{6}]=$

$2\sin(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2})=2\cos\frac{x}{3}$ 的图象, ··· 8 分

则 $g(\lambda x+\pi)=2\cos(\frac{\lambda x}{3}+\frac{\pi}{3})$,因为 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$,所以 $\frac{\lambda x}{3}+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\lambda\pi}{6}+\frac{\pi}{3},\frac{\lambda\pi}{3}+\frac{\pi}{3})$, ······ 9 分

则 $\begin{cases}\frac{\lambda\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\geqslant-\frac{\pi}{2}+k\pi,\\ \frac{\lambda\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+k\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$,解得 $-5+6k\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}+3k$, ································· 11 分

由 $\lambda>0$,可得 $\lambda\in(0,\frac{1}{2}]\cup[1,\frac{7}{2}]$,即正数 λ 的取值范围为 $(0,\frac{1}{2}]\cup[1,\frac{7}{2}]$. ········· 12 分