高一数学试题参考答案

1. D 【解析】本题考查集合的运算，考查逻辑推理的核心素养.
$\complement_U M=\{0,4,6\}$，$(\complement_U M)\cup N=\{0,2,3,4,6\}$.

2. B 【解析】本题考查全称量词命题，考查抽象概括能力.
选项 B 中的命题是全称量词命题，其他均为存在量词命题.

3. C 【解析】本题考查函数求值，考查运算求解能力.
$f(f(\sqrt{2}))=f(-3)=9-1=8$.

4. A 【解析】本题考查函数的定义域，考查运算求解能力.
令 $0\leqslant 4x\leqslant 4$，解得 $0\leqslant x\leqslant 1$，又 $x\neq 0$，所以函数 $g(x)=\dfrac{f(4x)}{x}$ 的定义域为 $(0,1]$.

5. C 【解析】本题考查一元二次方程的解，考查运算求解能力.
因为不等式 $ax^2+bx-3<0$ 的解集为 $\{x|-1<x<3\}$，所以 $a>0$，且 $x=-1$ 与 $x=3$ 为方程 $ax^2+bx-3=0$ 的两根，则 $\begin{cases}-\dfrac{b}{a}=-1+3,\\ -\dfrac{3}{a}=-1\times 3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-2,\\ a=1,\end{cases}$ 故不等式 $bx+1+a>0$，即 $-2x+2>0$，解得 $x<1$.

6. A 【解析】本题考查充分必要条件，考查逻辑推理的核心素养.
由 $(x-y)(x+y)^2>0$ 可得 $x-y>0$ 且 $x+y\neq 0$，则“$x>y$”是“$(x-y)(x+y)^2>0$”的必要不充分条件.

7. B 【解析】本题考查基本不等式，考查运算求解能力.
因为正实数 x,y 满足 $x+y=1$，则 $\dfrac{xy}{x+4y}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{x}}=\dfrac{1}{(\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{y})(x+y)}=\dfrac{1}{5+\dfrac{4y}{x}+\dfrac{x}{y}}\leqslant\dfrac{1}{5+2\sqrt{\dfrac{4y}{x}\cdot\dfrac{x}{y}}}=\dfrac{1}{9}$，当且仅当 $\dfrac{4y}{x}=\dfrac{x}{y}$ 时，等号成立.

8. A 【解析】本题考查函数的奇偶性，考查逻辑推理的核心素养.
因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，且 $f(2)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也单调递减，且 $f(-2)=0$，$f(0)=0$，因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增，且 $g(2)=0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，且 $g(-2)=0$，所以 $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ 满足 $f(x)g(x)<0$.

9. AD 【解析】本题考查不等式的关系，考查逻辑推理的核心素养.
由不等式的性质易知只有 AD 成立.

10. BD 【解析】本题考查命题的真假以及命题的否定，考查逻辑推理的核心素养.
因为 $\exists x\in M, x^2-4x>0$ 为假命题，所以 $\forall x\in M, x^2-4x\leqslant 0$ 为真命题，可得 $M\subseteq[0,4]$，
又 $\forall x\in M, 2-x<0$ 为真命题，可得 $M\subseteq(2,+\infty)$，所以 $M\subseteq(2,4]$. 故选 BD.

11. ACD 【解析】本题考查函数的性质，考查逻辑推理的核心素养.
因为 $y=x^3$，$y=x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上均单调递增，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，AD 正确；
因为 $y=x^3+x$ 是奇函数，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称，故 B 错误，C 正确，故选 ACD.

12. ABD 【解析】本题考查基本不等式，考查运算求解能力.
因为 $a^2+b^4=1$，所以 $-1<a<1$，$-1<b<1$.
对于 A，$a^2+b^2-\dfrac{1}{4}=1-b^4+b^2-\dfrac{1}{4}=-(b^2-\dfrac{1}{2})^2+1\leqslant 1$，故 A 正确；
对于 B，$ab^2\leqslant\dfrac{a^2+b^4}{2}=\dfrac{1}{2}$，当且仅当 $a=b^2$ 时，等号成立，所以 ab^2 的最大值为 $\dfrac{1}{2}$，故 B 正确；
对于 C，取 $a^2=\dfrac{1}{2}$，$b^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 C 错误；

对于 D，$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^4}=(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^4})(a^2+b^4)=2+\frac{b^4}{a^2}+\frac{a^2}{b^4}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{b^4}{a^2}\cdot\frac{a^2}{b^4}}=4$，当且仅当 $a^2=b^4$ 时，等号成立，故 D 正确.

13. 1 **【解析】本题考查集合的关系，考查逻辑推理的核心素养.**

由 $A\cap B=\{1\}$，可得 $a+b=1$，若 $b=1$，则 $a=0$，此时 $A\cap B=\{1\}$，满足题意；若 $a-b=1$，则 $b=0,a=1$，此时 $A\cap B=\{0,1\}$ 不满足题意，故 $b=1$.

14. $\frac{1}{x}$（答案不唯一） **【解析】本题考查函数的解析式，考查逻辑推理的核心素养.**

因为 $f(x)$ 是奇函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以同时满足两个条件的函数 $f(x)$ 可以为 $f(x)=\frac{1}{x}$.

15. $[-1,2]$ **【解析】本题考查不等式的应用，考查逻辑推理的核心素养.**

令 $f(x)=xy+2$，即 $f(x)\geqslant 0$ 在 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 上恒成立，所以 $\begin{cases}f(-1)\geqslant 0,\\ f(2)\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-y+2\geqslant 0,\\ 2y+2\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant y\leqslant 2$，所以 y 的取值范围是 $[-1,2]$.

16. $y=\begin{cases}3x+14000,0<x<1000,\\ 14000,x=1000,\\ -3x+20000,1000<x<2000;\end{cases}$ 1000 **【解析】本题考查函数的应用，考查数学建模的核心素养.**

当 $0<x<1000$ 时，$y=10x+7(2000-x)=3x+14000$，

当 $x=1000$ 时，$y=7\times 2000=14000$，

当 $1000<x<2000$ 时，$y=7x+10(2000-x)=-3x+20000$.

综上，$y=\begin{cases}3x+14000,0<x<1000,\\ 14000,x=1000,\\ -3x+20000,1000<x<2000.\end{cases}$

当 $0<x<1000$ 时，$14000<y<17000$，当 $1000<x<2000$，$14000<y<17000$，所以当 $y=14000$ 时，$x=1000$.

17. 解：(1) 由题可知 $\begin{cases}9m-3m+2<0,\\ m+m+2\geqslant 0,\end{cases}$ ………………………… 2 分

解得 $-1\leqslant m<-\frac{1}{3}$，所以 m 的取值范围为 $[-1,-\frac{1}{3})$. ………………………… 4 分

(2) $\begin{cases}2+x\geqslant 0,\\ 4-x\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x\geqslant -2$，且 $x\neq 4$，所以 $A=[-2,4)\cup(4,+\infty)$， ………………………… 5 分

$B=\{x|mx^2+mx+2<0\}$，当 $m=-1$ 时，$B=\{x|-x^2-x+2<0\}=(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$，………… 6 分

$A\cap B=(1,4)\cup(4,+\infty)$，………………………… 8 分

$A\cup B=\mathbf{R}$. ………………………… 10 分

18. 解：(1) 令 $x\in(-\infty,0)$，则 $-x\in(0,+\infty)$，………………………… 2 分

因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以 $f(x)=f(-x)$，………………………… 3 分

则 $f(x)=2x^2+3x(x<0)$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的解析式为 $f(x)=2x^2+3x$. ………………………… 5 分

(2) 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)<2$ 可化为 $2x^2-3x-2<0$，解得 $0\leqslant x<2$，………………………… 8 分

结合偶函数的性质可知，不等式 $f(x)<2$ 的解集为 $(-2,2)$. ………………………… 12 分

19. (1) 证明：$\forall x_1,x_2\in(0,2]$，且 $x_1<x_2$，………………………… 1 分

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1^2+4}{x_1}-\frac{x_2^2+4}{x_2}$ ………………………… 2 分

$=(x_1-x_2)+(\frac{4}{x_1}-\frac{4}{x_2})=(x_1-x_2)+\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}$

$=(x_1-x_2)(1-\frac{4}{x_1x_2})=(x_1-x_2)\frac{x_1x_2-4}{x_1x_2}$. ………………………… 4 分

因为 $0<x_1<x_2\leqslant 2$，所以 $x_1x_2<4$，则 $(x_1-x_2)\dfrac{x_1x_2-4}{x_1x_2}>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$， ………………………… 5 分

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,2]$ 上单调递减. ………………………… 6 分

(2)解：由(1)可知，$f(x)$ 在 $[a,1]$ 上为减函数且 $0<a<1$， ………………………… 8 分

所以 $f(1)=5=b$， ………………………… 10 分

$f(a)=\dfrac{a^2+4}{a}=\dfrac{37}{3}$，解得 $a=\dfrac{1}{3}$ 或 $a=12$(舍去)，

所以 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=5$. ………………………… 12 分

20. 解：令 $g(x)=f(x)+2x-36$，则函数 $g(x)=x^5+2x-36$ 单调递增，且 $g(2)=0$， ………………………… 2 分

所以 $A=\{x|x^5+2x-36<0\}=\{x|x<2\}$. ………………………… 4 分

(1)由于"$x\in A$"是"$x\in B$"的充分不必要条件，所以集合 A 是集合 B 的真子集，由此可得 $B=\{x|x<3\}$ 符合题意. ………………………… 8 分

(2)由于"$x\in A$"是"$x\in B$"的必要不充分条件，所以集合 B 是集合 A 的真子集，由此可知 $B=\{x|x<1\}$ 符合题意. ………………………… 12 分

21. 解：(1) $|AP|+|BP|+|CP|+|DP|=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}$ $(0<x<1,0<y<1)$. ………………………… 5 分

(2)根据基本不等式，得 $a^2+b^2\geqslant 2ab\Rightarrow 2(a^2+b^2)\geqslant (a+b)^2\Rightarrow\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\dfrac{a+b}{2}$， ………………………… 8 分

所以 $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\geqslant\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}+\dfrac{x+1-y}{\sqrt{2}}+\dfrac{1-x+y}{\sqrt{2}}+\dfrac{1-x+1-y}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $x=y=\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立，所以 $|AP|+|BP|+|CP|+|DP|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

………………………… 12 分

22. 解：(1)设 $f(x)=mx^2+nx+t(m\neq 0)$，由 $f(0)=2$，得 $t=2$. ………………………… 1 分

由 $f(x+1)=f(x)+2x$，得 $m(x+1)^2+n(x+1)+2=mx^2+nx+2+2x$， ………………………… 2 分

整理得 $(2m-2)x+(m+n)=0$， ………………………… 3 分

所以 $\begin{cases}2m-2=0,\\ m+n=0,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}m=1,\\ n=-1,\end{cases}$ ………………………… 4 分

所以 $f(x)=x^2-x+2$. ………………………… 5 分

(2)由题可得 $x+1\leqslant ax^2+bx+c\leqslant x^2-x+2$，

令 $x=1$，则 $2\leqslant a+b+c\leqslant 2$，故 $a+b+c=2$. ………………………… 6 分

对任意 $x\in\mathbf{R}$，$x+1\leqslant ax^2+bx+c$，则 $ax^2+(b-1)x+c-1\geqslant 0$ 恒成立，

所以 $\Delta=(b-1)^2-4a(c-1)=(a+c-1)^2-4a(c-1)=(a-c+1)^2\leqslant 0$， ………………………… 7 分

所以 $c=a+1$，此时 $b=1-2a$， ………………………… 8 分

所以 $bc+3a=(1-2a)(a+1)+3a=-2a^2+2a+1=-2(a-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{2}\leqslant\dfrac{3}{2}$，当 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=0$，$c=\dfrac{3}{2}$ 时，等号成立， ………………………… 10 分

此时 $x^2-x+2-(ax^2+bx+c)=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(x-1)^2\geqslant 0$ 成立，

所以 $bc+3a$ 的最大值为 $\dfrac{3}{2}$. ………………………… 12 分