

2023~2024 学年度下期高 2023 级期末联考

数 学

考试时间 120 分钟，满分 150 分

注意事项：

1. 答题前，考生务必在答题卡上将自己的姓名、座位号、准考证号用 0.5 毫米的黑色签字笔填写清楚，考生考试条形码由监考老师粘贴在答题卡上的“贴条形码区”。

2. 选择题使用 2B 铅笔填涂在答题卡上对应题目标号的位置上，如需改动，用橡皮擦擦干净后再填涂其它答案；非选择题用 0.5 毫米的黑色签字笔在答题卡的对应区域内作答，超出答题区域答题的答案无效；在草稿纸上、试卷上答题无效。

3. 考试结束后由监考老师将答题卡收回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 z 满足 $i \cdot z = 6 - 8i$ ，则 $|z| =$

- A. 8 B. 10 C. 14 D. 25

2. 已知点 $A(1,1)$ ， $B(4,2)$ 和向量 $a = (4, m)$ ，若 $a \parallel \overline{AB}$ ，则实数 m 的值为

- A. $-\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $-\frac{3}{4}$

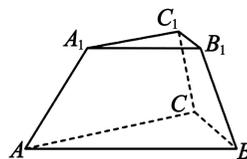
3. 某企业利用随机数表对生产的 60 个太阳能面板进行抽样测试，先将 60 个太阳能面板进行编号，01, 02, …, 59, 60. 从中抽取 12 个样本，下图提供随机数表的第 6 行至第 8 行，若从表中第 7 行第 9 列开始向右读取数据，则得到的第 6 个样本编号是

12 23 43 56 77 32 21 18 34 29 78 64 54 07 32 52 42 06 44 38 35 78 90 56 42
 25 30 07 32 86 23 45 58 89 07 23 18 96 08 04 84 42 12 53 31 34 57 86 07 36
 34 89 94 83 75 32 56 78 08 43 67 89 53 55 77 22 53 55 78 32 45 77 89 23 45

- A. 07 B. 18 C. 23 D. 08

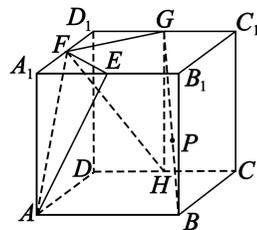
4. 如图，正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 的下底面边长为 12，上底面边长和侧棱长均为 6，则棱台的高为

- A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
 B. $3\sqrt{3}$
 C. $2\sqrt{6}$
 D. $2\sqrt{3}$



10. 在平面中, 设 Ox, Oy 是平面内相交成 θ 角的两条数轴, e_1, e_2 分别是与 x 轴, y 轴正方向同向的单位向量, 若向量 $\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2$, 则把有序数对 (x, y) 叫做向量 \overrightarrow{OP} 在坐标系 xOy 中的坐标, 记作 $\overrightarrow{OP} = (x, y)$. 若在坐标系 xOy 中, $\langle e_1, e_2 \rangle = \frac{2\pi}{3}$, 向量 $a = (2, 1)$, 则下列结论正确的是
- A. $|a| = \sqrt{3}$
- B. 若 $b = (x, y)$, 则 $a \perp b$ 的充要条件为 $2x + y = 0$
- C. 若 $b = (x, 3)$, 且 a 与 b 的夹角为锐角, 则实数 x 的取值范围为 $(0, 6) \cup (6, +\infty)$
- D. 若 $b = (1, 2)$, 则 $a + b$ 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$

11. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G, H 分别是棱 $A_1B_1, A_1D_1, C_1D_1, CD$ 的中点, P 是线段 BG 上一动点, 则下列结论正确的是
- A. 平面 $FGH \perp$ 平面 AEF
- B. 平面 EGB 将正方体分成的两个部分的体积比为 $1:3$
- C. $\angle D_1GB$ 是异面直线 BG 与 AB 所成的角
- D. 三棱锥 $A - PEF$ 的体积为定值



三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. 设 z 的共轭复数是 \bar{z} , 若 $z - \bar{z} = 4i$, $z \cdot \bar{z} = 4$, 则 $\bar{z} =$ _____.
13. 已知样本 9, 10, 11, x, y 的平均数是 10, $3x - 2y = -5$, 则样本的方差为 _____.
14. 设 θ 为两个非零向量 a, b 的夹角, 且 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 已知对任意实数 t , $|b + ta|$ 的最小值为 2, 则 $|b| =$ _____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

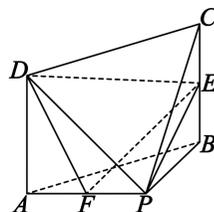
已知 $|a| = \sqrt{2}$, $|b| = 1$, a 与 b 的夹角为 45° .

- (1) 求 b 在 a 方向上的投影向量;
- (2) 求 $|2a + b|$ 的值.

16. (15 分)

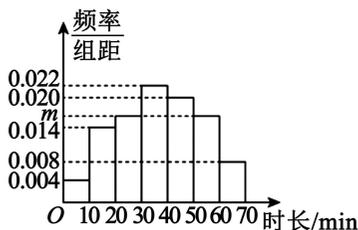
如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是矩形, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, E, F 分别为 BC, AP 的中点, 且 $AD = AP = PB = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = 2$.

- (1) 求证: $BP \perp DF$;
- (2) 求三棱锥 $P - DEF$ 的体积;
- (3) 求直线 EF 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.



17. (15分)

某中学为了解学生每天进行户外锻炼的时长, 体育教研组在高一年级随机调查了 500 位学生, 得到如下的样本数据的频率分布直方图.



- (1) 求 m 的值, 并估计抽查的学生中每天户外锻炼时长在 30 min~60 min 的人数;
- (2) 用样本估计总体, 估计高一年级学生每天进行户外锻炼的平均时长 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表);
- (3) 求高一年级学生每天进行户外锻炼的时长的上四分位数.

18. (17分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 请从下列条件中选择一个条件作答: (注: 如果选择多个条件分别作答, 则按第一个解答计分)

① $a\cos B + b\sin \frac{A}{2} = c$

② $b^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} S_{\triangle ABC} + abc\cos C$

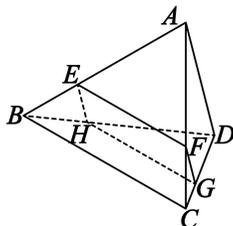
③ $2a\sin A = (2b-c)\sin B + (2c-b)\sin C$

(1) 求 A 的大小;

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 求 $\frac{2c+b}{b}$ 的取值范围.

19. (17分)

如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB=AC=BC=4$, $BD \perp DC$. E, F, G, H 分别是线段 AB, AC, CD, DB 上的动点, 且四边形 $EFGH$ 始终为平行四边形, 设 $\angle CBD = \alpha$.



- (1) 求证: $BC \parallel$ 平面 $EFGH$;
- (2) 若平面 ABC 与平面 BCD 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$, $\overline{AE} = 2\overline{EB}$, 则当 α 为何值时, 四边形 $EFGH$ 的面积最小, 并求出最小值;
- (3) 当平面 $EFGH \perp$ 平面 BCD 时, 求四面体 $ABCD$ 体积的最大值.